２０２５年２月７日　実施

昭和大学

医学部　Ｉ期　**数　学**

（制限時間　英語・数学または国語１４０分）

解答速報

解答・解説

1

$|\alpha|=\sqrt{2},\ \beta=4\quad |4\alpha-\beta|=4$

(1)

$$|4\alpha-\beta|^2=(4\alpha-\beta)(4\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$
$$=16\alpha\bar{\alpha}-4(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)+\beta\bar{\beta}$$
$$=16|\alpha|^2-4(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)+|\beta|^2$$

よって　$4^2=16\times(\sqrt{2})^2-4(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)+4^2$

$\therefore\ \alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=8$

両辺を $|\alpha|^2=\alpha\bar{\alpha}$ で割ると

$$\frac{\beta}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{8}{|\alpha|^2}$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=z$ とおくと　$z+\bar{z}=4.$

また $z\bar{z}=\dfrac{\beta\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}}=\dfrac{16}{2}=8$ だから z は

$$t^2-4t+8=0$$

の解であり　$t=2\pm2i$　$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=2\pm2i$

このとき　$\dfrac{\beta}{\alpha}=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

よって　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4=64\{\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi)\}$

$=-64$

(2)

$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$
$$=\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}$$
$$=(\sqrt{2})^2+8+4^2$$
$$=26$$

$\therefore\ |\alpha+\beta|=\sqrt{26}$

(3)　$|\alpha^n+\beta^n|=|\alpha|^n\cdot\left|1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|$

$n=16k+3$ のとき

$$\arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\times(16k+3)$$
$$=\pm\left(4k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$$

よって

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=(2\sqrt{2})^n\cdot\left\{\cos\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=(2\sqrt{2})^n\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$=-2^{\frac{3n-1}{2}}\pm2^{\frac{3n-1}{2}}i$$

$$\left|1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|=\sqrt{\left(1-2^{\frac{3n-1}{2}}\right)^2+\left(\pm2^{\frac{3n-1}{2}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1-2^{\frac{3n+1}{2}}+2^{3n}}$$

よって　$|\alpha^n+\beta^n|=\sqrt{2^n\left(1-2^{\frac{3n+1}{2}}+2^{3n}\right)}$

$\therefore\ a=\dfrac{3n+1}{2},\ b=3n$

(4)　$\angle\alpha O\beta=\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=\pm\dfrac{\pi}{4}$

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\alpha||\beta|\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2$$

2

(1-1)

$$2025 = 1928 + 97$$
$$1928 = 97 \times 19 + 85$$
$$97 = 85 \times 1 + 12$$
$$85 = 12 \times 7 + 1$$

よって $\gcd(2025, 1928) = \gcd(1928, 97)$
$= \gcd(97, 85)$
$= \gcd(85, 12)$
$= 1$

(1-2) (1-1)を利用して

$$\frac{2025}{1928} = 1 + \frac{97}{1928} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1928}{97}} = 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{85}{97}} = 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{12}{85}}} = 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12}}}}$$

$\therefore a_1 = 19,\ a_2 = 1,\ a_3 = 7,\ a_4 = 12$

(2) $f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right)$,

$g(x) = f(x^2 - 2)$
$= \left(x^2 - 2 - \frac{a}{2}\right)\left(x^2 - 2 - \frac{b}{2}\right)$

$g(x)$が$f(x)$で割り切れるとき $g\left(\frac{a}{2}\right) = g\left(\frac{b}{2}\right) = 0$.

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a^2}{4} - 2 - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2}{4} - 2 - \frac{b}{2}\right) = 0$$
$$(a^2 - 2a - 8)(a^2 - 2b - 8) = 0$$
$$(a+2)(a-4)(a^2 - 2b - 8) = 0. \quad \text{—①}$$

同様に $(b+2)(b-4)(b^2 - 2a - 8) = 0.$ —②

①より $a = -2.\ a = 4.\ a^2 - 2b - 8.$

(ア) $a = -2$ のとき

②より $b = -2, b = 4.\ b^2 - 4 = 0$

$a < b$を満たすのは,

$(-2, 4), (-2, 2).$

(イ) $a = 4$のとき.

②より $b = -2.4, b^2 - 16 = 0$

$a < b$を満たすものはない

(ウ) $a^2 - 2b - 8 = 0$のとき

②より $b = -2, b = 4.\ b^2 - 2a - 8 = 0$

- $b = -2$のとき $a^2 = 4.$ $a < b$より解なし.
- $b = 4$のとき $a^2 = 16.$ $a < b$より $a = -4$
- $b^2 - 2a - 8 = 0$のとき

2式の差から $a^2 - b^2 + 2(a - b) = 0.$
$(a - b)(a + b + 2) = 0$

$a \neq b$より $a + b = -2.$

2式の和から $a^2 + b^2 - 2(a + b) - 16 = 0$
$(a+b)^2 - 2ab - 2(a+b) - 16 = 0$
$4 - 2ab + 4 - 16 = 0$
$ab = -4.$

よって a, bは $t^2 + 2t - 4 = 0$の解.
これを満たす整数a, b ($a < b$)はない.
したがって

$(a, b) = (-2, 2)(-2, 4)(-4, 4)$

(3) ・$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ のとき:

$-\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1$

$\log_{\frac{1}{2}} xy \geqq -1 \quad \therefore\ xy \leqq 2$

・$x \geqq 1,\ 0 < y \leqq 1$ のとき:

$-\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1$

$\log_{\frac{1}{2}} y \leqq \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2} \quad \therefore\ y \geqq \frac{x}{2}$

・$0 < x \leqq 1,\ y \geqq 1$ のとき:

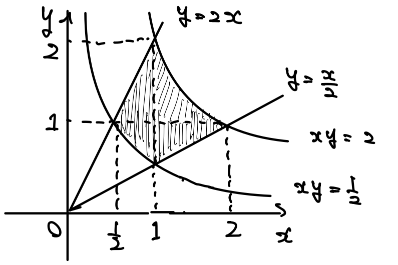
$x \geqq \frac{y}{2} \quad \therefore\ y \leqq 2x$

・$0 < x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ のとき

$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1$

$\log_{\frac{1}{2}} xy \leqq 1 \quad \therefore\ xy \geqq \frac{1}{2}$

これらを図示すると次のようになる.



(ii) $S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2x - \frac{1}{2x}\right) dx + \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) dx$

$= \left[x^2 - \frac{1}{2}\log x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[2\log x - \frac{x^2}{4}\right]_{1}^{2}$

$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2\right)$

$\quad + (2\log 2 - 1) + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{2}\log 2$

(4) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$

であるから, $n = 1, 2, \cdots, 2024$ として和をとると,

$S_{2025} - 1 < 2(\sqrt{2025} - \sqrt{1}) < S_{2025} - \frac{1}{\sqrt{2025}}$

$S_{2025} - 1 < 88 < S_{2025} - \frac{1}{45}$

$88 + \frac{1}{45} < S_{2025} < 89$

よって S_{2025} の整数部分は 88 である.

$\boxed{3}$ $A(p, q, 0),\ B(0, t, -s),\ C(0, t, s)$

ただし $p \neq 0,\ p^2 + q^2 = 1$ であり$s > 0$としても一般性を失わない

(1) $OA = OB = AB$ より

$1 = t^2 + s^2 = p^2 + (q-t)^2 + s^2$

$\begin{cases} t^2 + s^2 = 1 & \text{——①} \\ 1 - 2qt = 0 & \text{——②} \end{cases}$

①より$s > 0$から $-1 < t < 1$ である

②より $2qt - 1 = 0$ ——③

$f(q) = 2qt - 1$とおく. ③を満たす$-1 < q < 1$の実数qが存在する条件は,

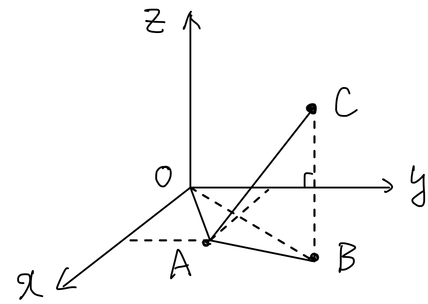
$t \neq 0,\ f(-1) \times f(1) < 0$

$t \neq 0,\ (-2t-1)(2t-1) < 0$

$t < -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < t$

したがって $-1 < t < -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < t < 1$

(2)



$(\triangle OAB) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\triangle OAB \equiv \triangle OAC$.

$(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot |t| \cdot 2s = s \cdot |t|$

点AとBCの中点$M(0, t, 0)$とのきょりdは

$d = \sqrt{p^2 + (q-t)^2} = \sqrt{1 - 2qt + t^2}$

③より $d = |t|$.

故に $(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |t| \cdot 2s = s|t|$

したがって表面積Sは

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + s|t| + s|t|$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2s|t|$

相加平均と相乗平均の大小関係より

$s^2 + t^2 \geqq 2\sqrt{s^2 \times t^2} = 2s|t|$

$\therefore\ 2s|t| \leqq 1$.

したがって $s = |t| = \frac{\sqrt{2}}{2}$のときに

$\max S = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

別解

$\triangle OAB \equiv \triangle OAC$で，それらは1辺の長さが1の正三角形より面積はそれぞれ$\frac{\sqrt{3}}{4}$である．また，OAの中点をMとすると，平面MBCに関して四面体OABCは対称であるから，

$\triangle OBC \equiv \triangle ABC$で，

$$\triangle OBC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\angle BOC$$

であるから，$\sin\angle BOC = \frac{\pi}{2}$のときに最大となる．このとき

$$\triangle OBC = \triangle ABC = \frac{1}{2}$$

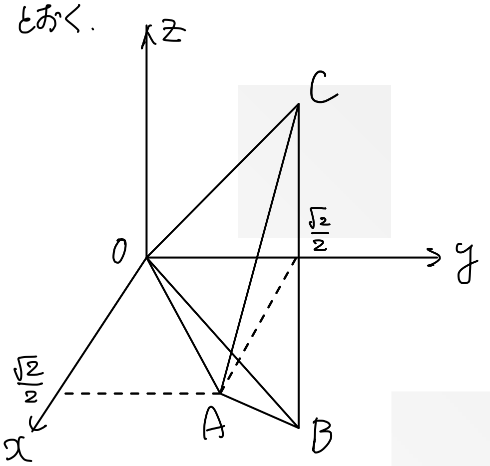
であるから．四面体OABCの表面積の最大値は $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}$ である．

(別解終り)

(3) $s=|t|=\frac{\sqrt{2}}{2}$のとき $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$として考える．

③より $\sqrt{2}q-1=0$ $\therefore q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$，$B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とおく．



V_x 線分AC上の点$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1-u)\right)$をx軸上の点$H_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u, 0, 0\right)$を中心に回転すると，$PH_x=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-u)^2}$.

よって $V_x=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} PH_x^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

($x=\frac{\sqrt{2}}{2}u$とおく)

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(u-1)^2\right\}du-\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}(u-1)^3\right]_0^1-\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}$$

V_y y軸まわりに線分OAをまわせばよく，

$$V_y=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{12}\pi}$$

V_z $V_z=2V_x=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}$

$\boxed{4}$

(1)(2) Aが $(0, n)$ に達するのは，$n+4$ 回のうち 1,2の目が5回，3〜6の目が $n-1$ 回出て，さらに 1,2の目が出るときであるから，

$$P_n = {}_{n+4}C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{{}_{n+4}C_5 \cdot 2^{n-1}}{3^{n+5}} \quad \cdots ①$$

$$P_1 = \frac{{}_5C_5 \cdot 2^0}{3^6} = \frac{1}{729}$$

$$P_2 = \frac{{}_6C_5 \cdot 2^1}{3^7} = \frac{4}{729}$$

$$P_3 = \frac{{}_7C_5 \cdot 2^2}{3^8} = \frac{28}{2187}$$

(3) ①より $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{n+5}{n} \cdot \dfrac{2}{3}$ であるから

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} - 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+5}{n} - 1 = \frac{10-n}{3n}$$

これより $n \leqq 9$ のとき $P_n < P_{n+1}$

$n = 10$ のとき $P_n = P_{n+1}$

$n \geqq 11$ のとき $P_n > P_{n+1}$

となるから，

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_9 < P_{10} = P_{11}$$

$$P_{11} > P_{12} > \cdots$$

であり，P_n が最大となるのは，

$n = 10, 11$ である．