2025年度　私大医学部入試

2025年1月26日　実施

近畿大学

医学部　一般入試前期　**数　学**

（制限時間　60分）

解答速報

医学部専門予備校 D組

解　答

$\boxed{1}$ (1) $t=\cos x$ とおくと,

$1-\cos 2x-3\cos x$

$=1-(2t^2-1)-3t=-2t^2-3t+2$

であるから, $f(x)$ を t で表すと

$\log_5(-2t^2-3t+2)$

(2) 真数条件は

$-2t^2-3t+2>0$

$(t+2)(2t-1)<0$

$-2<t<\frac{1}{2}$　　∴ $\cos x<\frac{1}{2}$

よって, $f(x)$ の定義域は $\frac{1}{3}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$

である.

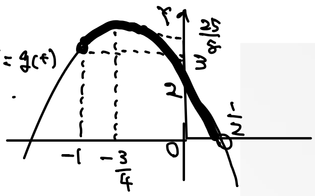
(3) $g(t)=-2t^2-3t+2$ とおくと,

$g(t)=-2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$　$\left(-1\leqq t<\frac{1}{2}\right)$

であり, $g(t)$ が最大のとき $f(x)$ も最大になるから, $f(x)$ の最大値は

$\log_5\frac{25}{8}=2-\log_5 8$

このとき, $\cos x=t=-\frac{3}{4}$ である.



(4) $5^{f(x)}=g(t)$ である.

$g(t)$ $\left(-1\leqq t<\frac{1}{2}\right)$ のとりうる最大の整数は 3 である.

$t=-1$ のときは x が1つ

$-1<t<\frac{1}{2}$ のときは x が2つ対応

することも合わせると, $g(t)=3$ となる x は3つ,

$g(t)=2,1$ となる x はそれぞれ2つずつ

あるから, 全部で $3+2\cdot2=7$ 個あり,

$t=-1$ のときは $x=\pi$

$-1<t<\frac{1}{2}$ のときは対応する2つの

x の和は 2π （α と $2\pi-\alpha$ になるため）

となるから, 総和は $3\pi+2\cdot2\pi=7\pi$

(5) $20^{f(x)}=\left(5^{f(x)}\right)^{\log_5 20}=g(t)^{\log_5 20}$

となる. ここで, $\left(\frac{25}{8}\right)^{\log_5 20}$ がどのくらいの数なのかを調べる.

$\log_{10}\left(\frac{25}{8}\right)^{\log_5 20}=\frac{\log_{10}20}{\log_{10}5}\cdot(2\log_{10}5-3\log_{10}2)$

$=\frac{1+\log_{10}2}{1-\log_{10}2}(2-5\log_{10}2)$

$=0.921\cdots$

となる. また

$\log_{10}8=3\log_{10}2=0.9030$

$\log_{10}9=2\log_{10}3=0.9542$

であるから, $8<\left(\frac{25}{8}\right)^{\log_5 20}<9$ と分かる.

これより, $20^{f(x)}$ がとりうる最大の整数は 8 である. また, $3^{\log_5 20}$ がどのくらいの大きさかを調べると,

$\log_{10}3^{\log_5 20}=\frac{1+\log_{10}2}{1-\log_{10}2}\cdot\log_{10}3$

$=0.88\cdots$

となる. $\log_{10}7=0.8451$ より

$7 < 3^{\log_5 20} < 8$ が分かる。よって，

$g(t)^{\log_5 20} = 8$ となる x は 4つ，

$g(t)^{\log_5 20} = 1 \sim 7$ となる x はそれぞれ

2つずつあるから，全部で $4 + 2 \cdot 7 = 18$個

ある。t に対応する x の和は 2π より，

総和は $4\pi + 7 \cdot 2\pi = 18\pi$ である。

2

(1) $p = \frac{1}{3}$ のとき，表が 2回出る確率は

$$ {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} $$

であり，少なくとも 1回表が出る確率は，

3回とも裏のときを除くて，

$$ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} $$

(2) (i) $n+1$ 回目に裏のものの中には

n 回目が表のものと裏のものがあるから

$$ b_{n+1} = a_n + b_n \quad \cdots ① $$

$n+1$ 回目が表のとき，n 回目は裏で

あるから，

$$ a_{n+1} = b_n \quad \cdots ② $$

①，② より $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \quad \cdots ③$

である。これらより $a_1 = b_1 = 1$，

$b_2 = 2$，$a_2 = 1$

$b_3 = 3$，$a_3 = 2$

$b_4 = 5$，$a_4 = 3$

(ii) $P(X_n) = \dfrac{a_n + b_n}{2^n} = \dfrac{b_{n+1}}{2^n}$

である。ここで，③ より

$b_5 = 8$，$b_6 = 13$，$b_7 = 21$

$b_8 = 34$，$b_9 = 55$，$b_{10} = 89$

$b_{11} = 144$

であるから，

$$ P(X_5) = \frac{b_6}{2^5} = \frac{13}{32} $$

$$ P(X_{10}) = \frac{b_{11}}{2^{10}} = \frac{9}{64} $$

(3) 1つ目の条件を考える。表を○、裏を×とかく。ちょうど3回出る確率は ${}_5C_3\, p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$ である。

3回以上出て、表がちょうど3回続けて出るのは

○○○××, ×○○○×, ××○○○

○○○×○, ○×○○○

のときで、この確率は

$3p^3(1-p)^2 + 2p^4(1-p)$ であるから、

1つ目の条件は

$$10p^3(1-p)^2 > 3p^3(1-p)^2 + 2p^4(1-p)$$

$$7(1-p) > 2p \qquad \therefore\ p < \frac{7}{9}$$

次に、2つ目の条件を考える。表がちょうどk回出る確率をP_kとすると、

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{{}_{15}C_{k+1}\, p^{k+1}(1-p)^{14-k}}{{}_{15}C_k\, p^k(1-p)^{15-k}} = \frac{15-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}$$

であるから、

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 = \frac{(16p-1)-k}{(k+1)(1-p)}$$

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_{12}$$

$$P_{12} > P_{13} > \cdots P_{15}$$

となる条件は

$(16p-1)-11>0$ かつ $(16p-1)-12<0$

すなわち $\frac{3}{4} < p < \frac{13}{16}$ である。

条件を2つとも満たすようなpの範囲は、$\frac{3}{4} < p < \frac{7}{9}$ である。

$\boxed{3}$

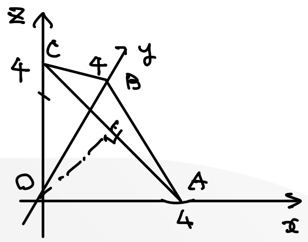
(1) BCの中点は $(0,2,2)$ であるから Oとの距離は $2\sqrt{2}$ である。また、△ABCは1辺の長さが $4\sqrt{2}$ の正三角形であるから、その面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$$ である。

(2) 垂線の長さをhとすると、三角錐 O−ABC の体積を2通りで表して

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\right)\cdot4 = \frac{1}{3}\cdot8\sqrt{3}\cdot h$$

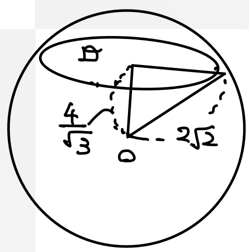
よって $h = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ である。



(3) (i) 図より、Dの半径は

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

である。



(ii) 平面ABC の方程式は

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \quad \therefore\ x+y+z=4$$

これより，X(p,q,r) は

$$p^2+q^2+r^2=8 \quad \cdots ①$$
$$p+q+r=4 \quad \cdots ②$$

を満たす。②より $q+r=4-p$ である

また，①より

$$q^2+r^2=8-p^2$$
$$(q+r)^2-2qr=8-p^2$$
$$(4-p)^2-2qr=8-p^2$$
$$qr=p^2-4p+4=(p-2)^2$$

(iii) q, r は2次方程式

$$x^2-(4-p)+(p-2)^2=0$$

の2解より，これが実数解をもつ条件は，判別式をDとしたとき $D \geqq 0$ であるから，

$$D=(4-p)^2-4(p-2)^2$$
$$=(8-3p)p \geqq 0$$

よって $0 \leqq p \leqq \frac{8}{3}$ である。

(iv) $\overrightarrow{PQ}=(-p,q,0)$，$\overrightarrow{PR}=(-p,0,r)$

であるから，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2)(p^2+r^2)-(p^2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(q^2+r^2)p^2+(qr)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(8-p^2)p^2+(p-2)^4}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{-8p^3+32p^2-32p+16}$$
$$=\sqrt{-2p^3+8p^2-8p+4}$$

$f(p)=-p^3+4p^2-4p+2$ とおくて，

$$f'(p)=-3p^2+8p-4$$
$$=-(p-2)(3p-2)$$

これより増減表は次のようになる。

p	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{8}{3}$
$f'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(p)$		↘		↗		↘	

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{16}{27}+\frac{32}{9}-\frac{16}{3}+4=\frac{22}{27}$$
$$=f\left(\frac{8}{3}\right)$$

であるから，Sの最小値は

$$\sqrt{2f\left(\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{\frac{44}{27}}=\frac{2\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{33}}{9}$$