福岡大学・医学部

1 （1） $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi$ とする．$t = \sin\theta\cos\theta$ として，$\sin\theta + \cos\theta$ を t の式で表すと $\boxed{}$ である．また関数 $f(\theta) = \sin^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\sin\theta$ の最大値は $\boxed{}$ である．

（2） $\triangle$ABC において AB $= 3$, CA $= 4$, $\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{4}$ とし，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を D とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の大きさは $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \boxed{}$ である．また辺 BC の中点を M とし，直線 AM 上に点 P をとり，線分 BP の中点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{DN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が直交するとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{}$ である．

（3） n を 3 以上の自然数とする．箱の中に 1 から n までの番号を 1 つずつ書いた n 枚の札が入っている．この箱の中から同時に 3 枚の札を取り出すとき，取り出した 3 枚の札の号のうち最小の番号が 3 である確率を P_n とする．このとき P_6 の値は $\boxed{}$ である．また n の値が変化するとき，P_n の最大値は $\boxed{}$ である．

2 （1） k を定数とし，点 P の座標 (x, y) が正の数 t の関数として

$$x = t + \frac{1}{t},\quad y = t^3 + \frac{1}{t^3} + (k^2 - k - 7)\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

で表されるとする．y を x と k を用いて表すと $y = \boxed{}$ である．また点 P が x 軸上の点となるような正の数 t が存在しない k の値の範囲は $\boxed{}$ である．

（2） 10 個の値 9, 10, 1, 2, 2, 8, 10, a, $a+3$, b をもつデータがあり，その平均値は 6 である．このとき b を a の式で表すと $b = \boxed{}$ である．さらに a, b が $a \leqq b$ を満たす整数であるとき，このデータの中央値が 7 となるような組 (a, b) は全部で $\boxed{}$ 個ある．

3 2 つの関数 $f(x) = 16\log(x + \sqrt{x^2+16})$, $g(x) = f(x) + x\sqrt{x^2+16}$ について次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

（1） 曲線 $C : y = g(x)\ (x \geqq 0)$ 上の点 $(3, g(3))$ における曲線 C の接線の方程式を求めよ．

（2） 曲線 $y = xf(x)\ (x \geqq 0)$，直線 $x = 3$，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

1

（1） **▶解答◀**

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ より

$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi$ から $\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{2}\pi$

$$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0$$

$$-\sqrt{2} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 + 2t$$

$$\sin\theta + \cos\theta = \boldsymbol{-\sqrt{1+2t}}$$

$\sin\theta + \cos\theta = s$ とおけば

$$-\sqrt{2} \leqq s \leqq 0$$

また，$t = \frac{s^2-1}{2}$

したがって

$$f(\theta) = \sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(s^3 - s) = g(s)$$

とおく．

$$g'(s) = \frac{1}{2}(3s^2 - 1)$$

s	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0
$g'(s)$		$+$	0	$-$	
$g(s)$		$\nearrow$		$\searrow$	

最大値：$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$

（2） **▶解答◀** $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおく．

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = 3\cdot4\cdot\frac{1}{4} = 3$$

点 D は BC を 3 : 1 に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{4}(\vec{b} + 3\vec{c})$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 = \frac{1}{4^2}(|\vec{b}|^2 + 6\vec{b}\cdot\vec{c} + 9|\vec{c}|^2)$$

$$= \frac{1}{4^2}(9 + 6\cdot3 + 9\cdot4^2)$$

$$= \frac{9}{16}\cdot19$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{19}}$$

点 M は BC の中点より

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

点 P は AM 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおく．

点 N は BP の中点より

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$$

$$=\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DN}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より

$$\left(\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$$

$$\frac{t}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2+\frac{1}{4}(\vec{b}-3\vec{c})\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=0$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{4}(9+6+16)=\frac{31}{4}$$

$$(\vec{b}-3\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}-3|\vec{c}|^2$$

$$=9-6-3\cdot16=-45$$

よって

$$\frac{31}{8}t-\frac{45}{8}=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{45}{31}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{45}{62}}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

（3） **▶解答◀**　全事象の場合の数は ${}_n\mathrm{C}_3$ であり，これらは同様に確からしい．最小の番号が 3 である取り出し方は，3 と 4〜n から 2 枚をとるとき

$$1\times{}_{n-3}\mathrm{C}_2$$

したがって

$$P_n=\frac{{}_{n-3}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3}$$

$n=6$ のとき

$$P_6=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\frac{3}{20}}$$

また

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-3}\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{(n-2)(n-3)n(n-1)(n-2)}{(n+1)n(n-1)\cdot(n-3)(n-4)}$$

$$=\frac{(n-2)^2}{(n+1)(n-4)}$$

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ を解くと

$$n^2-4n+4>n^2-3n-4 \qquad \therefore\quad n<8$$

したがって

$$P_5<P_6<P_7<P_8=P_9>P_{10}>\cdots$$

であり，最大値は $P_8=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{28}}$

2

（1） **▶解答◀**

$t^3+\dfrac{1}{t^3}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^3-3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$ であるから，

$$y=(x^3-3x)+(k^2-k-7)x$$

$$=\boldsymbol{x^3+(k^2-k-10)x}$$

である．また，相加相乗平均の不等式より

$$x\geqq2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$$

（等号は $t=1$ で成立）であり，正の数 t を大きくすると x はいくらでも大きくなるから，x の値域は $x\geqq2$ である．P が x 軸上の点となるとき

$$0=x^3+(k^2-k-10)x$$

$x\neq0$ で割って整理すると

$$x^2=-k^2+k+10$$

これが $x\geqq2$ の範囲に解を持たない条件は

$$-k^2+k-10<4$$

$$(k-3)(k+2)>0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{k<-2,\ 3<k}$$

注意　相加・相乗平均の不等式で得られる $x\geqq2$ のみを用いるのは，論理的に不十分である．単に x が 2 以上の値を取るのと値域が 2 以上であるのは違う．

（2） **▶解答◀**　平均値が 6 であるから，

$$\frac{1}{10}(9+10+1+2+2$$

$$+8+a+(a+3)+b)=60$$

$$45+2a+b=60 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{b=-2a+15}$$

また，$a\leqq b$ を満たすとき

$$a\leqq-2a+15 \qquad \therefore\quad a\leqq5$$

- $a=5$ のとき中央値が $\dfrac{13}{2}$ となり不適．
- $a=4$ のとき適する．
- $a=3$ のとき適する．
- $a\leqq2$ のとき中央値が $\dfrac{a+11}{2}$ となり不適．

よって，$(a,b)=(3,9),(4,7)$ の **2 組**である．

3

▶解答◀　（1）

$$f'(x)=16\cdot\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}}{x+\sqrt{x^2+16}}$$

$$=\frac{16}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$(x\sqrt{x^2+16})'=\sqrt{x^2+16}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}$$

$$=\frac{2(x^2+8)}{\sqrt{x^2+16}}$$

であるから，

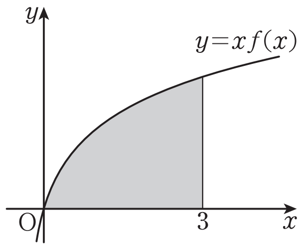
$$g'(x)=\frac{16+2(x^2+8)}{\sqrt{x^2+16}}=2\sqrt{x^2+16}$$

となる．これより，$x=3$ における C の接線の方程式は

$$y=10(x-3)+16\log(3+5)+3\cdot5$$

$$y = \mathbf{10}\boldsymbol{x} + \mathbf{48\log 2 - 15}$$

（**2**） $y = xf(x)$ は単調増加で，$x=0$ のとき $y=0$ である．



$$\int_0^3 xf(x)\,dx = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2}\right)' f(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{x^2}{2}f'(x)\,dx$$

$$= \frac{9}{2}f(3) - 8\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$$

$$= \frac{9}{2}f(3) - 8\int_0^3 \left(\sqrt{x^2+16} - \frac{16}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx$$

$$= \frac{9}{2}f(3) - 8\left[\frac{1}{2}g(x) - f(x)\right]_0^3$$

$$= \frac{9}{2}f(3) - 8\left(\frac{1}{2}g(3) - f(3) - \frac{1}{2}g(0) + f(0)\right)$$

$$= \frac{25}{2}f(3) - 8f(0) - 4g(3) + 4g(0)$$

$$= \frac{25}{2}f(3) - 8f(0) - 4(f(3)+15) + 4f(0)$$

$$= \frac{17}{2}f(3) - 4f(0) - 60$$

$$= \frac{17}{2}\cdot 16\log 8 - 4\cdot 16\log 4 - 60$$

$$= \mathbf{280\log 2 - 60}$$

♦別解♦　**【（1）を使えなければ】**

$t = x + \sqrt{x^2+16}$ とおくと

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+x} = \frac{1}{16}(\sqrt{x^2+16} - x)$$

$$\frac{16}{t} = \sqrt{x^2+16} - x$$

これより，

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{16}{t}\right)$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{16}{t^2}\right)$$

であるから，求める面積 S は

$$S = \int_0^3 xf(x)\,dx$$

$$= \int_4^8 \frac{1}{2}\left(t - \frac{16}{t}\right)\cdot 16\log t\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{16}{t^2}\right)dt$$

$$= 4\int_4^8 \left(t - \frac{256}{t^3}\right)\log t\,dt$$

$$= 4\int_4^8 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{128}{t^2}\right)'\log t\,dt$$

$$= 4\left[\left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{128}{t^2}\log t\right]_4^8 - 4\int_4^8 \left(\frac{t}{2} + \frac{128}{t^3}\right)dt$$

$$= 4(34\log 8 - 16\log 4) - 4\left[\frac{t^2}{4} - \frac{64}{t^2}\right]_4^8$$

$$= 280\log 2 - 4\cdot 15 = \mathbf{280\log 2 - 60}$$

講評
1、
（ｉ）（1）は対象型であるが、置き方が普通と逆なので戸惑った受験生もいるかもしれない。（2）は和の方を文字で置き直したほうが良くある問題になり出来に差ができただろう
（ii）値が汚いのでギョッとした受験生もいるかもしれないが典型的な問題である。
（iii）典型的なので経験があればまず大丈夫だろう
2、
（ｉ）（1）は典型的な置き換えである。（2）は穴埋めなので厳密に書こうとしなければ容易に答えは出せるだろう。
（ii）基本問題。しっかりと得点したい。
3、
（ｉ）計算が厳しいため、簡単に見えるが手間取った受験生が多いだろう。
（ii）図形の把握や立式ができれば十分であろう。最後まで解き切るには相当な実力が必要だろう。

一次合格予想ラインは50%～55%程度であろう。