昭和大学・医学部１期

1　（１）　２次方程式 $x^2-x-1=0$ の２解を α, $\beta(\alpha<\beta)$ とし，$a_n=\alpha^n+\beta^n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．次の各問いに答えよ．

（ｉ）　a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めよ．

（ii）　$n \geqq 3$ とする．一般項 a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ．

（iii）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

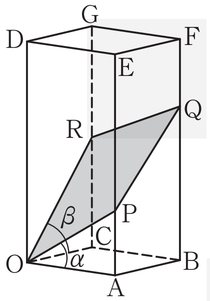
（２）　n を３以上の整数，$1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 j, k の組 (j, k) 全体の集合を I とする．次の各問いに答えよ．ただし，結果はできる限り因数分解した n の式で答えよ．

（ｉ）　組 (j, k) が I 全体を動くをき，積 jk の総和 S_1 を求めよ．

（ii）　組 (j, k) が $j<k$ を満たして I の中を動くとき，積 jk の総和 S_2 を求めよ．

（iii）　組 (j, k) が $j<k-1$ を満たして I の中を動くとき，積 jk の総和 S_3 を求めよ．

2　１辺の長さが１の正方形を底面とする立方体 OABC − DEFG を考える．点 O を通る平面で立方体を切断し，図のように３点 P，Q，R をとる．ただし，点 Q は辺 BF 上にあるものとする．切断面の面積を S, $\alpha=\angle\mathrm{AOP}$, $\beta=\angle\mathrm{COR}$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．



（１）　$\gamma=\angle\mathrm{POR}$ とする．$\cos\gamma$ を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を用いて表せ．

（２）　面積 S を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を用いて表せ．

（３）　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $S=\dfrac{7}{6}$ とする．次の各問いに答えよ．

（ｉ）　$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ．

（ii）　$\tan\alpha\tan\beta$ の値を求めよ．

3　xyz 空間のに３辺が $\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{BC}=7$, $\mathrm{CA}=5$ の三角形 ABC がある．点 P が三角形 ABC の辺上を一周する．次の各問いに答えよ．

（１）　三角形 ABC の面積 S_1 を求めよ．

（２）　三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ．

（３）　三角形 ABC と同一平面上にあり，点 P を中心とする半径 $t\,(0<t \leqq 1)$ の円を E とする．

（ｉ）　三角形 ABC の内部で円 E が通過しない部分の面積 S_2 を t を用いて表せ．

（ii）　円 E が通過する部分の面積 S_3 を t を用いて表せ．

（４）　点 P を中心とする半径１の球を F とする．球 F が通過する部分の体積 V を求めよ．

4　スペード，ハート，ダイヤ，クラフの各種類について，J，Q，K の３枚のカードがある．すなわちカードは全部で 12 枚ある．この中から無作為に４枚のカードを選ぶ．選ばれた４枚のカードについて，次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（１）　４枚のカードがスペード，ハート，ダイヤ，クラブのうちの２種類のみからなる確率を求めよ．

（２）　４枚のカードがスペード，ハート，ダイヤ，クラブのうちの３種類のみからなる確率を求めよ．

（３）　スペード，ハート，ダイヤ，クラブの４種類がそろう確率を求めよ．

（４）　J，Q，K がすべて選ばれる確率を求めよ．

（５）　スペード，ハート，多イヤ，クラブの４種類がそろい，かつ，J，Q，K がすべて選ばれる確率を求めよ．

1

（１） **▶解答◀** 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

である．このとき

$$a_n=\alpha^n+\beta^n$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-1}\beta+\alpha\beta^{n-1})$$
$$=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2}=a_{n-1}+a_{n-2}$$

である．

（ｉ） $a_0=2,\ a_1=\mathbf{1},\ a_2=1+2=\mathbf{3}$

$a_3=3+1=\mathbf{4},\ a_4=4+3=\mathbf{7}$

（ii） $a_n=\boldsymbol{a_{n-1}+a_{n-2}}$

（iii） （ii）より帰納的に $a_n\neq 0$ であり，

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくと，

$$b_n=1+\frac{1}{b_n}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$x^2-x-1=0$ の正の解を p とおくと，$p=1+\dfrac{1}{p}$ であり，

$$|b_{n+1}-p|=\frac{1}{pb_n}|b_n-p|\quad\cdots\cdots②$$

ここで，$p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ であり，① より帰納的に $b_n>1$ である．よって，$0<\dfrac{1}{pb_n}<\dfrac{1}{p}<1$ であるから，② より

$$|b_{n+1}-p|<\frac{1}{p}|b_n-p|$$
$$|b_n-p|<|b_1-p|\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ である．

（２） **▶解答◀** （ｉ） $(1+2+\cdots+n)^2$ を展開すると，積の総和となるから．

$$S_1=(1+2+\cdots+n)^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

（ii） $S_1=1^2+2^2+\cdots+n^2+\displaystyle\sum_{j\neq k}jk$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2S_2$$

となるから，

$$S_2=\frac{1}{2}\left\{S_1-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$$

（iii） S_2 から．$j=k-1$ となるものの和を除く．$j=k-1$ となるものの和は

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(n-1)n$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

であるから，

$$S_3=S_2-\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2-8)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}n(n+1)(n-1)(n-2)}$$

2

▶解答◀ （１） $P(1,0,\tan\alpha),R(0,1,\tan\beta)$ とおく．OP と RQ は平行な２平面 OAED，CBFG と平面 OPQR の交線であるから，OP // RQ である．同様に OR // PQ でもある．

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OR}|\cos\gamma$$
$$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}\cos\gamma$$
$$\cos\gamma=\boldsymbol{\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}}$$

（２） $S=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR})^2}$

$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}$$

（３） （ｉ） $\tan\alpha+\tan\beta=p,\ \tan\alpha\tan\beta=q$ とおく．$S=\dfrac{7}{6}$ より

$$S^2=1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\frac{49}{36}$$
$$1+p^2-2q=\frac{49}{36}\quad\cdots\cdots①$$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より $\tan(\alpha+\beta)=1$ であり

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$
$$\frac{p}{1-q}=1\qquad\therefore\quad q=1-p\quad\cdots\cdots②$$

② を ① へ代入して

$$1+p^2-2(1-p)=\frac{49}{36}$$
$$36p^2+72p-85=0$$
$$(6p-5)(6p-17)=0$$

$p>0$ より $p=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$ である．

（ii） ② より $q=1-\dfrac{5}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ である．

3

▶解答◀　（１）　$a=7,\ b=5,\ c=6$,

$a+b+c=2s$ とおくと $s=9$

したがって

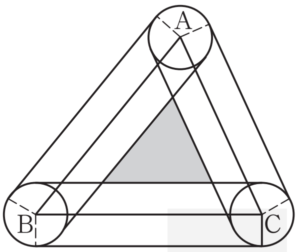
$$S_1=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

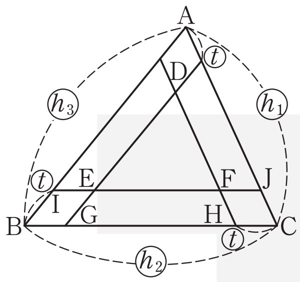
$$=\sqrt{9\cdot2\cdot4\cdot3}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$$

（２）　$S_1=\dfrac{1}{2}(7+5+6)r$ より

$$9r=6\sqrt{6}\qquad\therefore\quad r=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

（３）（ｉ）　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{5}$





点 C から AB に下ろした垂線の長さ h_1 は

$$h_1=\mathrm{AC}\sin A=2\sqrt{6}$$

点 B から AC に下ろした垂線の長さ h_2 は

$$h_2=\mathrm{AC}\sin A=\frac{12\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{5}{7}$$

点 A から BC に下ろした垂線の長さ h_3 は

$$h_3=\mathrm{AB}\sin B=\frac{12\sqrt{6}}{7}$$

$$\mathrm{CH}=\mathrm{BC}\times\frac{t}{h_2}=\frac{35t}{12\sqrt{6}}$$

$$\mathrm{BG}=\mathrm{BC}\times\frac{t}{h_1}=\frac{7t}{2\sqrt{6}}$$

また $\mathrm{IJ}:\mathrm{BC}=(h_3-t):h_3$ より

$$\mathrm{IJ}=\frac{7(h_3-t)}{h_3}$$

よって

$$\mathrm{EF}=7-\frac{49t}{12\sqrt{6}}-\frac{35t}{12\sqrt{6}}-\frac{7t}{2\sqrt{6}}$$

$$=7-\frac{7\sqrt{6}}{4}t=\frac{7}{4}(4-\sqrt{6}t)$$

$$\left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}}\right)^2=\left(\frac{4-\sqrt{6}t}{4}\right)^2=\frac{3t^2-4\sqrt{6}t+6}{8}$$

$$S_2=S_1\times\left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}}\right)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{4}(3t^2-4\sqrt{6}t+8)}$$

（ii）　$S_3=\triangle\mathrm{ABC}+(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})\times t$

$$+\pi t^2-S_2$$

$$=6\sqrt{6}+18t+\pi t^2-\frac{3\sqrt{6}}{4}(3t^2-4\sqrt{6}t+8)$$

$$=\boldsymbol{\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)t^2+36t}$$

（４）　三角形 ABC を xy 平面上にとり，$z=S$ による断面を考えると，（３）で半径 $t=\sqrt{1-S^2}$ とする図を得る．したがって

$$V=2\int_0^1\left\{\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)t^2+36t\right\}ds$$

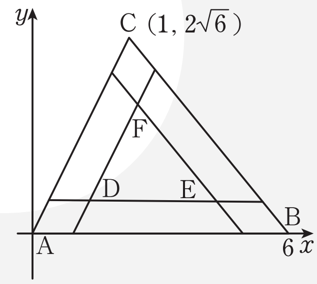
$$=2\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds$$

$$+72\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds$$

$$=2\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)\left[s-\frac{1}{3}s^2\right]_0^1+72\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}}$$

♦別解♦　（３）（ｉ）図のように座標を設定すると．このとき，直線 AC の方程式は $y=2\sqrt{6}x$，直線 BC の方程式は $y=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}x+\dfrac{12\sqrt{6}}{5}$ であるから，直線 DF の方程式は $y=2\sqrt{6}x-5t$，直線 EF の方程式は $y=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}x+\dfrac{12\sqrt{6}}{5}-\dfrac{7}{5}t$ である．



よって，2 直線 DF と EF の交点の y 座標は

$$y=-\frac{2\sqrt{6}}{5}\left(\frac{y+5t}{2\sqrt{6}}\right)+\frac{12\sqrt{6}}{5}-\frac{7}{5}t$$

$$y=-\frac{y}{5}-t+\frac{12\sqrt{6}}{5}-\frac{7}{5}t$$

$$y=-2t+2\sqrt{6}$$

これより，C から AB までの距離は $2\sqrt{6}$，F から DE までの距離は $2\sqrt{6}-3t$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DEF}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{DEF}=\left(\frac{2\sqrt{6}-3t}{2\sqrt{6}}\right)^2\triangle\mathrm{ABC}$$

$$=\left(1-\frac{3t}{2\sqrt{6}}\right)^2\cdot6\sqrt{6}$$

$$=6\sqrt{6}\left(1-\frac{3}{\sqrt{6}}t+\frac{3}{8}t^2\right)$$

よって，$S_2=\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{6}}{4}t^2-18t+6\sqrt{6}}$ である．

4

▶解答◀　（１）　絵柄はそれぞれ３枚ずつだから，４枚とも同じ絵柄になることはない．２種類の絵柄の組合せは ${}_4C_2$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_4}{{}_{12}C_4} = \mathbf{\frac{2}{11}}$$

（２）　３種類の絵柄の組合せは ${}_4C_3$ 通りある．ちょうど３種類になるのは

$${}_9C_4 - 3 \cdot {}_6C_4 = 81 \text{ 通り}$$

あるから，求める確率は

$$\frac{{}_4C_3 \cdot 81}{{}_{12}C_4} = \mathbf{\frac{36}{55}}$$

（３）　余事象は絵柄が３種類以下になることであるから，求める確率は

$$1 - \frac{2}{11} - \frac{36}{55} = \mathbf{\frac{9}{55}}$$

（４）　J，Q，K のいずれかが２枚，それ以外が１枚ずつになるときを考える．２枚となる数字は３通りある．J ２枚，Q １枚，K １枚とすると，そのような組合せは ${}_4C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{3 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{12}C_4} = \mathbf{\frac{32}{55}}$$

（５）　J ２枚，Q １枚，K １枚がすべて異なる絵柄になるのは J，J，Q，K を横１列に並べ，左からスペード，ハート，ダイヤ，クラブとしたものと対応するから $\frac{4!}{2!} = 12$ 通りある．よって求める確率は

$$\frac{3 \cdot 12}{{}_{12}C_4} = \mathbf{\frac{4}{55}}$$

講評
1、
（1）（2）比較的典型的な問題でしっかりと得点したい問題である。
（1−3）は答えだけなので、答えを出すことは難しくないが、論証しようとすると難しい。
2、
図形的に解こうとすると計算量は増えるが座標設定をすると計算がしやすい。
その見方でできるか否かでかなり差がついたものと思われる。
合否を分ける一題はこれであろう。
3、
（1）（2）は易しい。（3）はよくあるテーマではあるが、有名格ではないた目、計算量が膨大になり、以降は試験時間内に解くことは厳しいであろう。
4、
丁寧に解けば大丈夫であろう。ここを落とすとイタイ。

一次合格ライン予想は60%程度であろう。