昭和大学医学部 II

解答速報

＜数学＞

私大医学部専門予備校 D組

1 (1) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たす複素数 z の値を求めよ．また，このとき $z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}$ の値を求めよ．

(2) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は，どのような図形か述べよ．

(3) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる複素数 z と，$|w+2-2i|=1$ を満たす複素数 w について，$|z-w|$ の最小値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(4) n は正整数とする．次の群に分けられた数列について考える．

1 | 1, 1 | 1, 2, 1 | 1, 3, 3, 1 | 1, 4, 6, 4, 1 |, 1, 5, 10, 10, 5, 1 |, 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 | ⋯

(i) 第 n 群に含まれる項の総和を求めよ．

(ii) 与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの総和を求めよ． (24 昭和大・医-2 期)

1 ▶解答◀

(1) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$

$$z^2-\sqrt{2}z+1=0$$

$$z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$$

$z=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$z^{2024}=\cos(\pm 506\pi)+i\sin(\pm 506\pi)=1$$

したがって $z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}=\mathbf{2}$

(2) 「$z+\dfrac{1}{z}$ が実数」より

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}$$

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$$

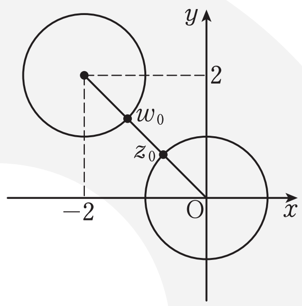
$$z^2\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}^2+z,\ z\neq 0$$

$$(z\overline{z}-1)(z-\overline{z})=0,\ z\neq 0$$

$$|z|=1 \text{ または } z=\overline{z},\ z\neq 0$$

実軸，および，O を中心とし半径 1 の円．ただし原点を除く．

(3) $|w-(-2+2i)|=1$ より点 w は，点 $-2+2i$ を中心とし，半径 1 の円上．



したがって $|z-w|$ が最小となるのは上の図の z_0, w_0 のとき

$$|z_0-w_0|=\mathbf{2\sqrt{2}-2}$$

(4) (i) 第 n 群内の和 T_n は

$$T_n={}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}$$

$$=(1+1)^{n-1}=\mathbf{2^{n-1}}$$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\mathbf{2^n-1}$

2 x, y は実数とする．次の各問いに答えよ．

（1） $\log_2(1-3x)+\log_4(x+3) \leqq 2$ を満たすような実数 x の範囲を不等式を用いて表せ．

（2） $[x]$ は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を表す．方程式 $[3x]-[x]=2$ を満足する x の範囲を不等式を用いて表せ．

（3） $x>0$ とする．$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ．

（4） 実数 x, y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たすとき，$x+2xy+y$ の最大値と最小値を求めよ．

（5） 不等式 $\big||x|-1\big|+|y| \leqq 1$ を満足する領域を xy 平面上に図示せよ．　（24　昭和大・医-2 期）

2 **▶解答◀** （1） 真数条件より

$1-3x>0$ かつ $x+3>0$

すなわち $-3<x<\dfrac{1}{3}$ である．

$$\log_2(1-3x)+\frac{\log_2(x+3)}{2} \leqq 2$$

$$2\log_2(1-3x)+\log_2(x+3) \leqq 4$$

$$\log_2(1-3x)^2(x+3) \leqq \log_2 16$$

底 $2>1$ より

$$(1-3x)^2(x+3) \leqq 16$$

$$9x^3+21x^2-17x-13 \leqq 0$$

$$(x-1)(9x^2+30x+13) \leqq 0$$

$$(x-1)\left(x-\frac{-5+2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{-5-2\sqrt{3}}{3}\right) \leqq 0$$

$-3<x<\dfrac{1}{3}$ も合わせて

$$\boldsymbol{-3<x \leqq \frac{-5-2\sqrt{3}}{3},\ \frac{-5+2\sqrt{3}}{3} \leqq x < \frac{1}{3}}$$

（2） $n+\dfrac{k}{3} \leqq x < n+\dfrac{k+1}{3}$ $(k=0, 1, 2)$ のとき，

$$[3x]=3n+k, [x]=n$$

となるから，$[3x]-[x]=2$ となるとき，$2n+k=2$ である．

- $k=0$ のとき $n=1$ となるから，$1 \leqq x < \dfrac{4}{3}$ である．
- $k=1$ のとき n は整数にならず不適
- $k=2$ のとき $n=0$ となるから，$\dfrac{2}{3} \leqq x < 1$

以上より，$\dfrac{2}{3} \leqq x < \dfrac{4}{3}$ である．

♦別解♦ 【等式として処理する】

n を整数，$k=0, 1, 2$，β を $0 \leqq \beta < 1$ を満たす実数として $x=n+\dfrac{k+\beta}{3}$ とかくと，

$$[3x]=[3n+k+\beta]=3n+k,\ [x]=n$$

であるから，

$$3n+k-n=2 \qquad \therefore \quad 2n+k=2$$

$$(n, k)=(0, 2), (1, 0)$$

となるから，

$$x=\frac{2+\beta}{3}, 1+\frac{\beta}{3}$$

それぞれ $0 \leqq \beta < 1$ であるから，

$$\frac{2}{3} \leqq x < 1, 1 \leqq x < \frac{4}{3}$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} \leqq x < \dfrac{4}{3}}$ である．

（3） $x>0$ より，相加・相乗平均の不等式より

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{1}{2x}\right)$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+2+\frac{1}{2}$$

$$\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}+2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

等号は $x^2=\dfrac{1}{x^2}$，すなわち $x=1$ で成立するから，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$ である．

（4） $x+y=s, xy=t$ とおく．$x-y$ は実数より

$$(x-y)^2=s^2-4t \geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

また，$x^2+xy+y^2=1$ より

$$(x+y)^2-xy=1$$

$$s^2-t=1 \qquad \therefore \quad t=s^2-1 \quad \cdots\cdots②$$

② を ① に代入して

$$s^2-4(s^2-1) \geqq 0$$

$$3s^2-4 \leqq 0 \qquad \therefore \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq s \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots③$$

このとき，$F=x+2xy+y$ とおくと

$$F=s+2t=s+2(s^2-1)$$

$$=2s^2+s-2=2\left(s+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$$

③ における最大値，最小値を考えて，$s=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ において最大値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}+2}{3}}$ をとる．また，$s=-\dfrac{1}{4}$ において最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{17}{8}}$ をとる．

（5） 与えられた不等式は，x を $-x$ に，y を $-y$ に置き換えても成立するから，求める領域は x 軸，y 軸に関してそれぞれ対称である．$x \geqq 0, y \geqq 0$ で考えると，こ

れは $|x-1|+|y| \leqq 1$ となる．これは $|x|+|y| \leqq 1$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの（図 1）である．これを軸に関して折り返して図 2 を得る．

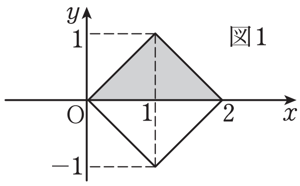


図1

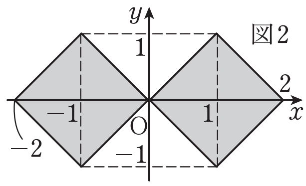


図2

3 xy 平面上において，曲線 $y=x^4-4x^2+4x+2$ を ①，曲線 ① と異なる 2 点で接する直線を ②，直線 ② と平行で曲線 ① にただ 1 点で接する直線を ③ とする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（1） 直線 ② の方程式を求めよ．

（2） 直線 ③ の方程式を求めよ．

（3） 曲線 ① と直線 ② で囲まれた面積 S_1 を求めよ．

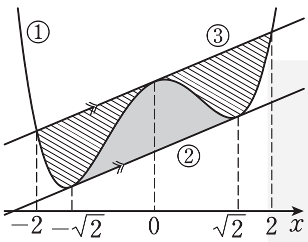
（4） 曲線 ① と直線 ③ で囲まれたすべての部分の面積の和 S_2 を求めよ．

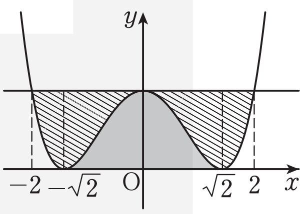
（5） $f(x)=x^4-4x^2+4x+2$ は，$x=\alpha,\ \beta(\alpha\neq\beta)$ で極小値をとり，$x=\gamma$ で極大値をとるものとする．3 点 $(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta)),\ (\gamma,\ f(\gamma))$ をすべて通り，軸が y 軸に平行な放物線の方程式を求めよ．

（24　昭和大・医-2 期）

3 **▶解答◀** （1） $y=(x^2-2)^2+4x-2$ であるから，② の方程式は $\boldsymbol{y=4x-2}$ である．また，このときの接点の x 座標は $\pm\sqrt{2}$ である．

（2） $y=x^2(x^2-4)+4x+2$ であるから，③ の方程式は $\boldsymbol{y=4x+2}$ である．このとき，接点の x 座標は 0 で，① と ③ の交点のうち接点でないものの x 座標は ± 2 である．





（3） S_1 は図の網目部分の面積であるから

$$S_1=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^2-2)^2\,dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}(x^4-4x^2+4)\,dx$$

$$=2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{8\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}\right)=\boldsymbol{\frac{64}{15}\sqrt{2}}$$

（4） S_2 は図の斜線部分の面積であるから，

$$S_2=2\int_0^2\{-(x^4-4x^2)\}\,dx$$

$$=2\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{128}{15}}$$

（5） $f(x)$ を $f'(x)$(の定数倍) で割る．

$$f(x)=x(x^3-2x+1)-2x^2+3x+2$$

$$=\frac{x}{4}f'(x)-2x^2+3x+2$$

となる．このとき，$g(x)=-2x^2+3x+2$ とおくと，

$$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$$

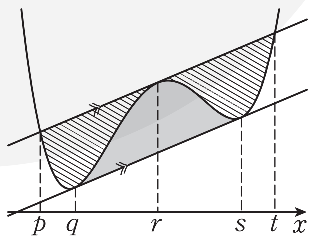
であるから，

$$f(\alpha)=g(\alpha),\ f(\beta)=g(\beta),\ f(\gamma)=g(\gamma)$$

となり，$y=g(x)$ は $(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta)),\ (\gamma,\ f(\gamma))$ をすべて通る．よって，3 つの極値を与える点はすべて放物線 $\boldsymbol{y=-2x^2+3x+2}$ 上にある．また，軸が y 軸に平行で，この 3 点を通る放物線は 1 つに決まるからこれ以外にはない．

注意 **【4 次関数の二重接線に関する性質】**

一般に，4 次関数の二重接線について，次のような性質が成立する．



$$r=\frac{q+s}{2}=\frac{p+t}{2}$$

$$|r-q|:|r-p|=1:\sqrt{2}=|r-s|:|r-t|$$

網目部分の面積を S_1，斜線部分の面積を S_2 とすると

$$S_1:S_2=1:\sqrt{2}$$

4 ある地域で感染症 A が流行している．その地域の住民を無作為に選んで感染症 A の検査 X を，行うこととした．実際に感染症 A に感染している人が検査 X を受けると $\frac{7}{10}$ の確率で陽性と判定される，ところが実際には感染症 A に感染していない人でも検査 X を受けると $\frac{1}{10}$ の確率で陽性と判定されてしまう．ここで，その地域の住民全体に占める真の感染者の割合を $\frac{1}{100}$ とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，答えは既約分数で表して，結果のみを解答欄に記入せよ．

（1） 無作為に選ばれた人が検査 X を受けたとき，感染症 A にかかっていて，かつ検査 X で陽性と判定される確率を求めよ．

（2） 無作為に選ばれた人が検査 X を受けたとき，陽性と判定される確率を求めよ．

（3） 検査 X で陽性と判定された人が実際に感染症 A に感染している確率を求めよ．

（4） 検査 X で陽性と判定されなかった人が実際に感染症 A に感染していない確率を求めよ．

（5） 検査 X で陽性と判定された人には速やかに 2 回目の検査 X を行う．2 回目の検査 X でも陽性と判定された人が実際に感染症 A に感染している確率を求めよ．

（24　昭和大・医-2 期）

4 **▶解答◀** 事象 A：住民が感染症 A に感染している

事象 B：検査 X で陽性と判定

とする．条件より

$$P(\mathrm{A})=\frac{1}{100},\ P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{7}{10},\ P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\frac{1}{10},$$

$$P(\overline{\mathrm{A}})=\frac{99}{100},\ P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})=\frac{3}{10},\ P_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})=\frac{9}{10}$$

（1） $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\boldsymbol{\frac{7}{1000}}$

（2） $P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$ であり

$$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\frac{99}{1000}$$

したがって

$$P(\mathrm{B})=\frac{7}{1000}+\frac{99}{1000}=\boldsymbol{\frac{53}{500}}$$

（3） $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{(\mathrm{B})}=\boldsymbol{\frac{7}{106}}$

（4） $P_{\overline{\mathrm{B}}}(\overline{\mathrm{A}})=\frac{P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})}{P(\overline{\mathrm{B}})}$

ここで

$$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})$$

$$=\frac{99}{100}\times\frac{9}{10}=\frac{891}{1000}$$

したがって $P_{\overline{\mathrm{B}}}(\overline{\mathrm{A}})=\boldsymbol{\frac{891}{894}}$

（5） 事象 C：1 回目に陽性と判定された人が 2 回目も陽性と判定される

とする．

$$P(C)=P(\mathrm{A}\cap C)+P(\overline{\mathrm{A}}\cap C)$$

$$=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(C)+P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(C)$$

$$=\frac{1}{100}\times\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{99}{100}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$=\frac{148}{10000}$$

したがって

$$P_C(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap C)}{P(C)}=\boldsymbol{\frac{49}{148}}$$