東北医科薬科大学

試験日　2023 年 1 月 21 日　時間 70 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B

1　座標平面上でサイクロイド $C: x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を考える．C 上の点 $\mathrm{P}(t - \sin t,\ 1 - \cos t)\ (0 < t < 2\pi)$ における接線および法線をそれぞれ l_t, L_t で表す．また，l_t と x 軸の交点を A，L_t と x 軸の交点を B，線分 PB の中点を Q とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

（1）L_t の傾きを t を用いて表すと $\square \tan\dfrac{t}{\square}$ となる．

（2）$t = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，3 点 A，B，Q の座標は，

$$\mathrm{A}\left(\frac{\square}{\square}\pi + \square\sqrt{\square},\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{\square}{\square}\pi,\ 0\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{\square}{\square}\pi + \frac{\sqrt{\square}}{\square},\ \frac{\square}{\square}\right)$$

である．

（3）t が $0 < t < 2\pi$ を動くとき，点 Q が描く軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\square}{\square}\pi$ である．この図形を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V を $V = a\pi^b$ と整数 a, b を用いて表すとき，$a = \square$，$b = \square$ となる．

2　袋 A から袋 D には数字が書かれたカードが入っている．どのカードにも数字はただ一つだけ書かれている．袋 A には 1, 2, 3, 4 の数字の赤色のカードが各 1 枚ずつ計 4 枚入っている．袋 B には 0 の数字のカードが 1 枚，1 の数字のカードが 2 枚の計 3 枚の青色のカードが入っている．袋 C には 1 の数字のカードが 2 枚，2 の数字のカードが 1 枚，3 の数字のカードが 1 枚，4 の数字のカードが 1 枚の計 5 枚の緑色のカードが入っている．袋 D には 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の数字が書かれた黄色のカードが各 1 枚ずつ計 10 枚入っている．袋 A，B，C，D から 1 枚ずつカードを引いて，赤，青，緑，黄色の順にそれぞれ千の位，百の位，十の位，一の位に数字を並べてできる 4 桁の正の整数を N とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

（1）N が 2000 以上 4000 以下の奇数となる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2）N が 3 の倍数である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，6 の倍数である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（3）N が 7 の倍数である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，2, 3, 5, 7 のいずれの倍数でもない確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

3　以下の問いに答えなさい．

（1）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{\square}$ である．

（2）$\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{x+b}{x^2+cx+d}\right)$ と部分分数に分解するとき，$a = \square$，$b = \square$，$c = \square$，$d = \square$ である．

（3）$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx = \frac{1}{\square}\left(\log\square + \frac{\pi}{\sqrt{\square}}\right)$ である．ただし，log は自然対数とする．

（4）$J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^2}dx = \frac{1}{\square} + \frac{\square}{\square}\left(\log\square + \frac{\pi}{\sqrt{\square}}\right)$ である．ただし，log は自然対数とする．

1 数学Ⅲ【体積】標 準

▶解答◀　(**1**)　$x=\theta-\sin\theta, y=1-\cos\theta$ のとき

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$0<t<2\pi$ より，l_t の傾きは $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

L_t の傾きは，$t\neq\pi$ のとき

$$-\frac{1-\cos t}{\sin t}=-\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\boldsymbol{-\tan\frac{t}{2}}$$

(**2**)　$t\neq\pi$ のとき

$$l_t: y=\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}(x-t+\sin t)+1-\cos t$$

$$L_t: y=-\tan\frac{t}{2}(x-t+\sin t)+1-\cos t$$

$t=\frac{4}{3}\pi$ として

$$l_{\frac{4}{3}\pi}: y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}$$

$y=0$ とすると

$$0=x-\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$$

$$L_{\frac{4}{3}\pi}: y=\sqrt{3}\left(x-\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}$$

$y=0$ とすると

$$0=x-\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\quad x=\frac{4}{3}\pi$$

よって，$\mathrm{A}\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}, 0}\right)$，$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi, 0}\right)$

$t=\frac{4}{3}\pi$ のとき $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ であるから，

$$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}}\right)$$

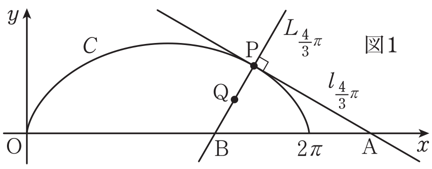

図1

(**3**)　L_t において $y=0$ とすると

$$0=-\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\left(x-t+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)+2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$0=-\left(x-t+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$x=t$$

よって，$\mathrm{B}(t, 0)$ であるから

$$\mathrm{Q}\left(t-\frac{\sin t}{2}, \frac{1-\cos t}{2}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$t=\pi$ のとき，$\mathrm{P}(\pi, 2)$, $l_\pi: y=2$ であるから，$L_\pi: x=\pi$, $\mathrm{B}(\pi, 0)$ であり，$\mathrm{Q}(\pi, 1)$ となり，① は $t=\pi$ のときも成り立つ．

$D: x=\theta-\dfrac{\sin\theta}{2}, y=\dfrac{1-\cos\theta}{2}\ (0<\theta<2\pi)$ とする．Q は線分 PB の中点であり

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\frac{\cos\theta}{2}>0, y>0$$

θ	$0\ \to\ 2\pi$
x	$0\ \to\ 2\pi$

であるから，D の概形は図 2 のようになる．求める面積 S は図 2 の網目部分の面積である．

(普通の積分は注を見よ)

$a_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^n\theta\,d\theta$ とおくと

$$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-2}$$

$$a_1=\Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0,\ a_3=\frac{2}{3}a_1=0$$

$$a_0=2\pi,\ a_2=\frac{1}{2}a_0=\pi$$

$$S=\int_0^{2\pi}y\,dx=\int_0^{2\pi}y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\frac{2-\cos\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(2-3\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}(2\cdot2\pi-3a_1+a_2)=\frac{1}{4}(4\pi+\pi)=\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi}$$

V は図 2 の網目部分を x 軸の周りに回転して得られる体積であるから

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{2\pi}y^2\,dx=\int_0^{2\pi}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2\cdot\frac{2-\cos\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(2-5\cos\theta+4\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}(2\cdot2\pi-5a_1+4a_2-a_3)$$

$$=\frac{1}{8}(4\pi+4\pi)=\pi$$

よって，$V=\pi^2$ であり，$a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{2}$ である．

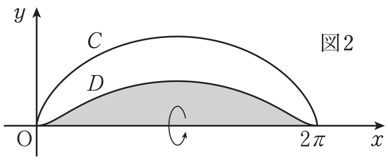

図2

注 意

$$a_2=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$a_3 = \int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\sin^2\theta)(\sin\theta)' \, d\theta$$

$$= \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

2 数学A 【確率の雑題】 やや難

▶解答◀　A，B，C，Dから取り出すカードの数を a, b, c, d とする．

A：1，2，3，4

B：0，1，1

C：1，1，2，3，4

D：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9

（**1**）　$a = 2, 3$（確率 $\frac{2}{4}$）かつ $d = 1, 3, 5, 7, 9$（確率 $\frac{5}{10}$）のときで，求める確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

（**2**）　$1000a + 100b + 10c + d$

$= 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d)$

が 3 の倍数になるのは $a + b + c + d$ が 3 の倍数のときである．A，B，C，Dの数を 3 で割った余りで表す．

A：1，2，0，1

B：0，1，1

C：1，1，2，0，1

D：0，1，2，0，1，2，0，1，2，0

表 1

b \ a	0(1)	1(2)	2(1)
0(1)	0(1)	1(2)	2(1)
1(2)	1(2)	2(4)	0(2)

表 2

c \ $a+b$	0(3)	1(4)	2(5)
0(1)	0(3)	1(4)	2(5)
1(3)	1(9)	2(12)	0(15)
2(1)	2(3)	0(4)	1(5)

表 3

d \ $a+b+c$	0(22)	1(18)	2(20)
0(4)	0(88)	1(72)	2(80)
1(3)	1(66)	2(54)	0(60)
2(3)	2(66)	0(54)	1(60)

表 1 で 0(1), 1(2), 2(1) は $a = 0, 1, 2$ になるカードが順に 1 枚，2 枚，1 枚あることを示し，b の方も同様で $a + b$ を 3 で割った余りと (a, b) の個数を表にした．たとえば，2(1) は $a = 2, b = 0$ のとき $a + b = 2$ で (a, b) は 1 つあることを示す．表 2 は $a + b + c$，表 3 は $a + b + c + d$ の表である．

N が 3 の倍数である確率は

$$\frac{88 + 60 + 54}{4\cdot3\cdot5\cdot10} = \frac{202}{600} = \boldsymbol{\frac{101}{300}}$$

次に d が偶数 0, 2, 4, 6, 8 の場合に 3 で割った余りを求めると 0, 2, 1, 0, 2 である．$a + b + c + d$ が 3 の倍数でかつ d が偶数になる場合は表 4 を見よ．

表 4

d \ $a+b+c$	0(22)	1(18)	2(20)
0(2)	0(44)		
1(1)			0(20)
2(2)		0(36)	

N が 6 の倍数になる確率は

$$\frac{44 + 20 + 36}{600} = \frac{100}{600} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

（**3**）　mod 7 で $10 \equiv 3$, $10^2 \equiv 9 \equiv 2$, $10^3 \equiv 27 \equiv 6$

$N = 1000a + 100b + 10c + d$

$\equiv 6a + 2b + 3c + d$

表 A

b \ a	1(1)	2(1)	3(1)	4(1)
0(1)	6(1) [1]	5(1) [2]	4(1) [0]	3(1) [1]
1(2)	1(2) [2]	0(2) [0]	6(2) [1]	5(2) [2]

mod 7 で表 A は $6a+2b$ の値, 表 B は $6a+2b+3c$ の値を表し，表 C は $6a+2b+3c$ の値と $6a+2b+3c+d \equiv 0$ になる d の値を表す．ただし，表 A の角括弧内（かくかっこ [ ]）の数は $a+b$ を 3 で割った余りである．後半で必要になる．他も同様である．

表 B

c \ $6a+2b$	0(2) [0]	1(2) [2]	3(1) [1]	4(1) [0]	5(3) [2]	6(3) [1]
1(2)	3(4) [1]	4(4) [0]	6(2) [2]	0(2) [1]	1(6) [0]	2(6) [2]
2(1)	6(2) [2]	0(2) [1]	2(1) [0]	3(1) [2]	4(3) [1]	5(3) [0]
3(1)	2(2) [0]	3(2) [2]	5(1) [1]	6(1) [0]	0(3) [2]	1(3) [1]
4(1)	5(2) [1]	6(2) [0]	1(1) [2]	2(1) [1]	3(3) [0]	4(3) [2]

$6a+2b+3c$	0(7)	1(10)	2(10)	3(10)	4(10)	5(6)	6(7)
表 C　d	0，7	6	5	4	3	2，9	1，8

N が 7 の倍数になる確率は

$$\frac{7\cdot2 + 10 + 10 + 10 + 10 + 6\cdot2 + 7\cdot2}{4\cdot3\cdot5\cdot10}$$

$$= \frac{80}{4\cdot3\cdot5\cdot10} = \boldsymbol{\frac{2}{15}}$$

N が 2，3，5，7 の倍数でないとき，d は奇数でなければならず，かつ，$d \neq 5$ であるから 1, 3, 7, 9 のいずれかで，その確率は $\frac{4}{10}$ である．ただし，この中には

N が 3 の倍数になるとき ……………………………①

N が 3 の倍数でないが 7 の倍数になるとき ….②

が含まれているから，それを除く．

表 D を見よ．表 3 と同じ見方である．① になる N は $20 + 22 + 20 + 22 = 84$ 通りある．

表 D

d ＼ $a+b+c$	0(22)	1(18)	2(20)
1			0(20)
3	0(22)		
7			0(20)
9	0(22)		

表 E を見よ．表 B と同じ見方である．② になる N は

$$3+3+3+4+3=16 \text{ 通り}$$

ある．N が 2, 3, 5, 7 のいずれの倍数でない確率は

$$\frac{4}{10}-\frac{84+16}{600}=\frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{7}{30}}$$

表 E

d ＼ $6a+2b+3c$	0(7) ([1](4), [2](3))	4(10) ([0](4), [1](3), [2](3))	5(6) ([0](3), [1](3))	6(7)
1				[0](3)
3		[1](3), [2](3)		
7	[1](4)			
9			[1](3)	

3 数学Ⅲ【定積分】標 準

▶解答◀ （1） $x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

（2） $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$

であるから $x^2+cx+d=x^2-x+1$ であり

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x+b}{x^2-x+1}\right)$$

の分母をはらうと

$$a=x^2-x+1-(x+1)(x+b)$$

$$a=(-2-b)x+1-b$$

これが恒等式で

$$-2-b=0,\ a=1-b$$

$$b=\mathbf{-2},\ a=\mathbf{3},\ c=\mathbf{-1},\ d=\mathbf{1}$$

（3） $\displaystyle \frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-4}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}$$

$\displaystyle \frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ の積分では

$\displaystyle x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}\right)$ と置換する．

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)\right]_0^1$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$$

（4） $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx=\int_0^1 (x)'\cdot\frac{1}{1+x^3}\,dx$

$$=\left[\frac{x}{1+x^3}\right]_0^1-\int_0^1 x\left(\frac{1}{1+x^3}\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^1 x\cdot\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^1 \frac{3(1+x^3)-3}{(1+x^3)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}+3\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx-3\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^2}\,dx$$

$$I=\frac{1}{2}+3I-3J$$

$$J=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}I=\boldsymbol{\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$$

要の分析　どの問題も計算量が多く，後半が難しい．制限時間内で解き切るのは困難であろう．前半を手際よく解き，後半に少しでも多くの時間を残したい．（中谷，林聡，鈴木伊，新美，安田亨）