東海大学・医学部（2日目）

試験日　2023 年 2 月 3 日　時間 70 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1） 連立不等式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(4x+1) < 3+x \\ 3x+1 \geqq x \end{cases}$$

を満たす整数 x は，全部で $\boxed{}$ 個ある．

（2） $9\log_a b + \log_b a = 6$ のとき，$\log_{a^2} b + \log_{b^2} a$ の値は $\boxed{}$ である．

（3） 円 $x^2-6x+y^2-4y+8=0$ に接し，傾きが $-\dfrac{1}{2}$ である直線の方程式は，$y=-\dfrac{1}{2}x+\boxed{\text{ア}}$ と，$y=-\dfrac{1}{2}x+\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする．

（4） $-3 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ において，関数 $y=-x^3+3x$ の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である．

（5） $\displaystyle\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx = \boxed{}$

（6） $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\tan^3 x + \dfrac{1}{\tan^3 x} = \boxed{}$ である．

（7） 1 辺の長さが 3 である正八面体に 6 点で外接する球の半径は $\boxed{}$ であり，8 点で内接する球の半径は $\boxed{}$ である．

2 xy 平面上で，次の 3 つの円を考える．

C_1：中心が第 2 象限にあり，x 軸と点 $(-1, 0)$ で接する半径 a の円

C_2：中心が第 1 象限にあり，x 軸と点 $(1, 0)$ で接する半径 b の円

C_3：中心が点 $(0, c)$ で，2 点 $(-1, 0), (1, 0)$ を通る円

（1） $a=2, b=1$ のとき，C_1 と C_2 の交点の座標は，$(\boxed{\text{ア}}, \boxed{})$ と $(\boxed{\text{イ}}, \boxed{})$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする．

（2） C_1 と C_2 が異なる 2 点 P, Q で交わるとき，原点 O との距離の積 OP・OQ の値は $\boxed{}$ である．

（3） C_1 と C_2 が接するとき，b は a を用いて表すと，$b=\boxed{}$ である．

（4） C_3 が点 $(-1, 2)$ を通るとき，$c=\boxed{}$ である．

（5） s を実数，t を正の実数とする．C_1, C_2, C_3 が共に点 $\mathrm{R}(s, t)$ を通るとき，a は s, t を用いて表すと，$a=\boxed{}$ である．また，積 ab の値を c のみで表すと，$ab=\boxed{}$ である．

3 自然数 $1, 2, 3, \cdots$ を下の図のように表に並べていく．

1	2	4	7	11	
3	5	8	12		
6	9	13			
10	14				
15					

表の横の並びを行と呼び，上から順に 1 行目，2 行目，3 行目，$\cdots$ と呼ぶ．表の縦の並びを列と呼び，左から順に 1 列目，2 列目，3 列目，$\cdots$ と呼ぶ．例えば，表の 2 行目は $3, 5, 8, \cdots$ であり，表の 3 列目は $4, 8, 13, \cdots$ である．i, j を自然数として，i 行目 j 列目にある数を (i, j) 成分と呼ぶ．例えば，$(3, 2)$ 成分は 9 である．上の表は，$(1, 1)$ 成分を 1 として，以下の規則で自然数を並べている．

(i) $(i, 1)$ 成分が k ならば，$(1, i+1)$ 成分は $k+1$ である．

(ii) (i, j) 成分 $(j \neq 1)$ が k ならば，$(i+1, j-1)$ 成分は $k+1$ である．

（1） $(20, 1)$ 成分は $\boxed{}$ であり，$(20, 20)$ 成分は $\boxed{}$ である．また，$(\boxed{}, \boxed{})$ 成分は 200 である．

（2） n を自然数とする．$(1, n)$ 成分は $\boxed{}$ であり，(n, n) 成分は $\boxed{}$ である．

（3） n を自然数とする．表の 1 行目から n 行目のうち，1 列目から n 列目を取り出す．その中に含まれる数のうち，奇数の個数を $a(n)$ とおく．

例えば，$n=3$ であれば，

1	2	4
3	5	8
6	9	13

の中の奇数の個数であるから，$a(3)=5$ となる．$a(20)$ は $\boxed{}$ である．

1

（1） 数学Ⅰ【1 次不等式】基 本

▶解答◀　$\frac{1}{2}(4x+1)<3+x$ より $x<\frac{5}{2}$

$3x+1 \geqq x$ より $x \geqq -\frac{1}{2}$

よって，$-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{5}{2}$

この不等式を満たす整数 x は，0, 1, 2 の **3** 個ある．

（2） 数学Ⅱ【対数の計算】基 本

▶解答◀　底の条件から，$a>0,\ a \neq 1,\ b>0,\ b \neq 1$ であり，与式より

$$9\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=6$$

$$9(\log_a b)^2-6\log_a b+1=0$$

$$(3\log_a b-1)^2=0 \qquad \therefore \quad \log_a b=\frac{1}{3}$$

$$\log_{a^2} b+\log_{b^2} a=\frac{\log_a b}{\log_a a^2}+\frac{\log_a a}{\log_a b^2}$$

$$=\frac{\log_a b}{2}+\frac{1}{2\log_a b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+3\right)=\boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

（3） 数学Ⅱ【円と直線】基 本

▶解答◀　円 $x^2-6x+y^2-4y+8=0$，すなわち，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ の中心は $(3,\ 2)$，半径は $\sqrt{5}$ である．直線 $y=-\frac{1}{2}x+b$, すなわち, 直線 $x+2y-2b=0$ が，この円に接するから

$$\frac{|3+2\cdot 2-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

$$|2b-7|=5$$

$$2b-7=\pm 5 \qquad \therefore \quad b=1,\ 6$$

求める直線の方程式は，$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+1,\ y=-\frac{1}{2}x+6}$

（4） 数学Ⅱ【最大値・最小値】基 本

▶解答◀　$f(x)=-x^3+3x$ とおくと，

$$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f(-3)=-(-3)^3+3(-3)=18$,

$f(1)=-1^3+3\cdot 1=2$ より，最大値は **18**

$f(-1)=-(-1)^3+3(-1)=-2$,

$f(\sqrt{3})=-(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})=0$ より，最小値は $\boldsymbol{-2}$

（5） 数学Ⅱ【定積分】基 本

▶解答◀　曲線 $y=x^2-4x+3$ の $x=2$ に関する対称性を利用する．求める定積分を I として

$$\frac{I}{2}=\int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx$$

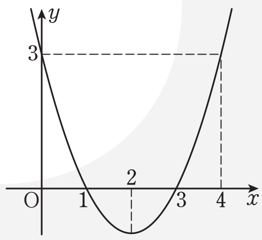
$$-\int_1^2 (x^2-4x+3)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^2$$

$$=2\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)$$

$$=-2+2+8-6=2$$

$$I=\boldsymbol{4}$$



注意　$\int_0^4 y\,dx+\frac{1}{6}(3-1)^3\cdot 2$ という計算も可能ではあるが，楽になるわけではない．牛刀を用いて鶏を裂く行為である．

（6） 数学Ⅱ【加法定理とその応用】基 本

▶解答◀　$\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して，

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$$

$$1+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$$

$$\sin x\cos x=-\frac{3}{8}$$

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=-\frac{8}{3}$$

であるから

$$\tan^3 x+\frac{1}{\tan^3 x}$$

$$= \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^3$$
$$-3\tan x \cdot \frac{1}{\tan x}\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)$$
$$= \left(-\frac{8}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{8}{3}\right) = -\boldsymbol{\frac{296}{27}}$$

（7） 数学B【ベクトルと図形(空間)】標準

▶解答◀ 図で直交する3直線OA, OB, OCの上に8頂点をもつように正八面体を埋め込む.

外接球の半径は $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{2}}$ である.

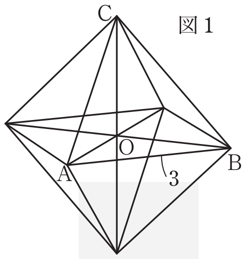


図1

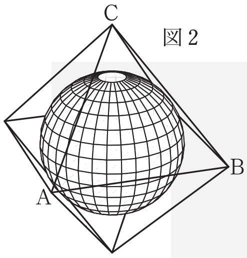


図2

内接球の半径を r とする. 四面体OABCの体積 V は, 三角形ABCを底面, r を高さとする四面体の体積に等しいから $V = \frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC} \cdot r$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 \cdot r$$
$$r = \frac{3}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

2

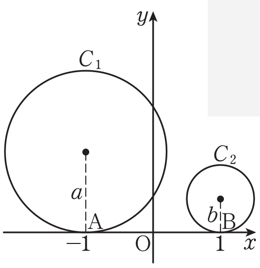
数学Ⅱ【円の方程式】標準

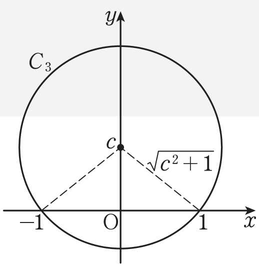
▶解答◀ $C_1 : (x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2$

$x^2 + y^2 + 2x - 2ay + 1 = 0$ ……①

$C_2 : (x-1)^2 + (y-b)^2 = b^2$

$x^2 + y^2 - 2x - 2by + 1 = 0$ ……②





（1） $a = 2, b = 1$ のとき

$C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ ……③

$C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ……④

③−④より $4x - 2y = 0$

$y = 2x$ となり③に代入し

$5x^2 - 6x + 1 = 0$

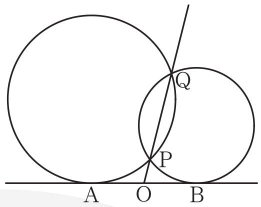
$(5x-1)(x-1) = 0$

$x = \frac{1}{5}, 1$ で2交点は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), (1, 2)}$

（2） ①−②より $2x - (a-b)y = 0$

C_1, C_2 が2交点をもつとき, 2交点を通る直線は原点Oを通る. A$(-1, 0)$ として, 方べきの定理より

$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = \mathrm{OA}^2 = \mathbf{1}$



（3） C$(-1, a)$, D$(1, b)$ とする.

C_1, C_2 が接するのは外接するときに限る.

B$(1, 0)$ は C_1 の外部にあるから内接することはありえない. $\mathrm{CD} = a + b$ として

$2^2 + |a-b|^2 = (a+b)^2$

$4ab = 4$ となり $b = \boldsymbol{\frac{1}{a}}$

（4） $C_3 : x^2 + (y-c)^2 = c^2 + 1$

$x^2 + y^2 - 2cy = 1$ ……⑤

が $(-1, 2)$ を通るとき

$1 + 4 - 4c = 1$

となり, $c = \mathbf{1}$

（5） ①, ②, ⑤が1点を共有するときである.

C_1, C_2, C_3 が (s, t) を通るとき

$s^2 + t^2 + 2s - 2at + 1 = 0$ ……⑥

$s^2 + t^2 - 2s - 2bt + 1 = 0$ ……⑦

$s^2 + t^2 - 2ct - 1 = 0$ ……⑧

⑥より $a = \boldsymbol{\frac{1}{2t}(s^2 + t^2 + 2s + 1)}$

⑧より $s^2 + t^2 = 2ct + 1$ であるから

$a = \frac{1}{t}(ct + s + 1)$

同様に⑦, ⑧より $b = \frac{1}{t}(ct - s + 1)$ をえる.

$ab = \frac{1}{t^2}\{(ct+1)^2 - s^2\}$

であり⑧より $s^2 = -t^2 + 2ct + 1$ を代入すると

$ab = \frac{1}{t^2}(c^2t^2 + 2ct + 1 + t^2 - 2ct - 1)$

$= \frac{1}{t^2}(c^2+1)t^2 = \boldsymbol{c^2 + 1}$

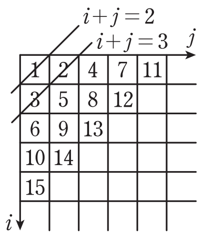
3

数学B【群数列】標準

▶解答◀ （1） 図のように, $i + j = N$ である (i, j) を考え第 $N-1$ 群をつくる.

$(20, 1)$ について $i+j=21$ であるから 20 群の最後にある．最初から数えると

$1+2+\cdots+20=\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=210$ 番目にあるから **210** である．



1 群	2 群		3 群		
$i+j=2$	$i+j=3$		$i+j=4$		
$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(1, 3)$	$(2, 2)$	$(3, 1)$
1	2	3	4	5	6

4 群				
$i+j=5$				
$(1, 4)$	$(2, 3)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$	……
7	8	9	10	

(i, j) の数を $x(i, j)$ とする．

$(20, 20)$ は $i+j=40$ を満たすから第 39 群の 20 番目にある．第 1 群，…，第 38 群には 1 項，…，38 項ある．

$$x(20, 20)=1+2+\cdots+38+20$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 38(38+1)+20=\mathbf{761}$$

$i+j\geqq 3$ のとき

$$x(i, j)=1+2+\cdots+(i+j-2)+i$$
$$=\frac{1}{2}(i+j-2)(i+j-1)+i$$

結果は $i=j=1$ でも成り立つ．

$x(i, j)=200$ のとき $i+j-1=N$ とおくと

$$\frac{1}{2}(N-1)N<200\leqq\frac{1}{2}N(N+1)$$

$\dfrac{1}{2}N^2\fallingdotseq 200$ とすると $N\fallingdotseq 20$

$N=20$ とすると $190<200\leqq 210$ で成り立つ．

$$i+j=21,\ x(i, j)=190+i$$

よって $i=10,\ j=11$ であり $(i, j)=\mathbf{(10, 11)}$

(2)　$x(1, n)=\dfrac{1}{2}(n-1)n+1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)}$

$$x(n, n)=\frac{1}{2}(2n-2)(2n-1)+n$$
$$=(n-1)(2n-1)+n=\boldsymbol{2n^2-2n+1}$$

(3)　$x(n, n)=2n^2-2n+1$ は奇数である．つまり，左上から右下へかけての対角線 1, 5, 13 には奇数がある．この左も奇数である．

$n\geqq 2$ のとき

$$x(n, n-1)=\frac{1}{2}(2n-3)(2n-2)+n$$
$$=2n^2-4n+3$$

も奇数である．与えられた表の中で横に 2 ずれると偶奇が入れかわることに気づく．これは次のように確認できる．

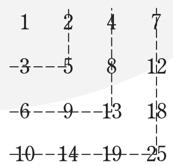
$$x(i,\ j+2)-x(i,\ j)$$
$$=\frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i$$
$$\quad-\frac{1}{2}(i+j-2)(i+j-1)-i$$
$$=\frac{1}{2}(i+j)^2+\frac{1}{2}(i+j)$$
$$\quad-\frac{1}{2}(i+j)^2+\frac{3}{2}(i+j)-1$$
$$=2(i+j)-1=\text{奇数}$$

今求めるものが $a(20)$ で 20 が 4 の倍数であることに着目する．左右に 2 ずれたら偶奇が入れかわり，4 ずれたら偶奇が一致する．どの左右の 4 個をとっても半分は偶数，半分は奇数である．たとえば下の表に 19, 25, 32, 40 という並びがある．この中には偶数も奇数も 2 個ずつある．

1	2	4	7	11	16	22	29
3	5	8	12	17	23	30	38
6	9	13	18	24	31	39	48
10	14	19	25	32	40	49	59
15	20	26	33	41	50	60	71
21	27	34	42	51	61	72	84
28	35	43	52	62	73	85	98
36	44	53	63	74	86	99	113

左右 20 の正方形の中には $20^2=400$ 個の数があるが，その半分 200 個は奇数である．$a(20)=\mathbf{200}$

注意　カギ型の並びを考える．



たとえば 7, 12, 18, 25, 19, 14, 10 を $L(4)$ とし $L(4)$ の中の奇数の個数を $y(4)$ とする．他も同様とする．上と同様の計算で $x(i+2,\ j)-x(i,\ j)$ も奇数であるとわかり，上下に 2 ずれても偶奇が入れかわる．よって，$L(n+4)$ と $L(n)$ では奇数は上下方向で 2 個ふえ，左右方向で 2 個ふえるから $y(n+4)-y(n)=4$ である．実際に数えると $y(1)=1$，$y(2)=2$，

$y(3)=2$，$y(4)=3$ であるから，これを用いて一般の個数も容易に求められる．

たとえば $a(613)$ を求めてみよう．$613=4\cdot 153+1$ である．

$y(4m)=y(4)+4(m-1)$

$=3+4(m-1)=4m-1$

$y(4m-1)=y(3)+4(m-1)$

$=2+4(m-1)=4m-2$

$y(4m-2)=y(2)+4(m-1)$

$=2+4(m-1)=4m-2$

$y(4m-3)=y(1)+4(m-1)$

$=1+4(m-1)=4m-3$

$y(4m)+y(4m-1)+y(4m-2)+y(4m-3)$

$=4(4m-2)=8(2m-1)$

$a(613)=\sum_{k=1}^{612} y(k)+y(613)$

$=\sum_{m=1}^{153} 8(2m-1)+613=8\cdot 153^2+613=187885$

$\frac{1}{2}\cdot 613^2=187884.5$ だから，およそ半分ではある．

要の分析　易しくはなったが，随分とおさえている印象である．

（三輪，田中博，KK，前田拓，安田亨）