東海大学・医学部（1 日目）

試験日　2023 年 2 月 2 日　時間 70 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （1） a，a，a，a，a，b，b，c の 8 文字を 1 列に並べるとき，並べ方の総数は $\square$ である．

（2） 関数 $y = 8^x - 3\cdot 2^{x+3} + 2$ は，$x = \square$ のとき最小値をとる．

（3） $\mathrm{AB} = 8, \mathrm{BC} = 5, \mathrm{CA} = 7$ である三角形 ABC の内心を I とし，直線 CI と辺 AB との交点を D とする．このとき，三角形 ADI の面積は，三角形 ABC の面積の $\square$ 倍である．

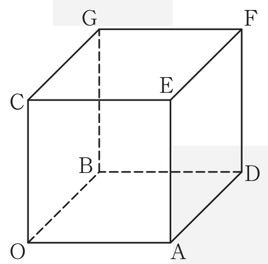
（4） $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+2)(x-3)\,dx = \square$

（5） 4 つの鋭角 A, B, C, D が，$\cos A = \cos B\cos C$, $\sin B = \sin A\sin D$ という 2 つの関係式を満たしているとき，$\sin C\tan D$ を B のみで表すと，$\sin C\tan D = \square$ である．また，$\tan A\cos D$ を C のみで表すと，$\tan A\cos D = \square$ である．

（6） n を自然数とする．$\sqrt{n^2+63}$ が自然数になるような n は $\square$ 個ある．

（7） 方程式 $\log_{2023}(11-2x) + \log_{\frac{1}{2023}}(1-x^2) = \log_{2023}(x+2) + 2\log_{\frac{1}{2023}}(x+1)$ の解は，$x = \square$ である．

2 $k > 1$ とする．下図のような 1 辺の長さが 1 の立方体 OADB-CEFG において，$\overrightarrow{\mathrm{DL}} = k\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ となる点を L とし，直線 OL と面 CEFG との交点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．



（1） $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと $\square$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \square$ である．

（2） $\cos\angle\mathrm{AOM} = \square$ であり，三角形 OAM の面積は $\square$ である．また，点 C から平面 OAM へ下ろした垂線と，平面 OAM との交点を H とする．垂線 CH の長さは $\square$ であり，四面体 OAMC の体積は $\square$ である．

（3） 点 O と異なる点 N が線分 OF 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \square(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ である．また，四面体 ABCN の体積は $\square$ である．

3 a を実数とする．数列 $\{a_n\}$ は，初項を $a_1 = a$ とし，自然数 n に対して，漸化式 $a_{n+1} = 4|a_n - 1|$ で定義されるものとする．

（1） $a = \dfrac{41}{32}$ のとき，$a_4 = \square$ である．

（2） $a = \dfrac{47}{64}$ のとき，$a_4 = \square$ である．

（3） すべての自然数 n に対して $a_n = a$ となるとき，a は，$a = \boxed{\text{ア}}$，または，$a = \boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする．

（4） $a > \boxed{\text{イ}}$ ならば，一般項 a_n は，a を用いて表すと，$a_n = \square$ である．

（5） $a_1 \neq \boxed{\text{ア}}$ であり，2 以上のすべての自然数 n に対して $a_n = \boxed{\text{ア}}$ となるとき，a は，$a = \square$ である．

（6） $a_1 \neq \boxed{\text{ア}}$，かつ，$a_2 \neq \boxed{\text{ア}}$ であり，3 以上のすべての自然数 n に対して $a_n = \boxed{\text{ア}}$ となるとき，a は，$a = \boxed{\text{ウ}}$，または，$a = \boxed{\text{エ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}}$ とする．

1

（1）数学A【場合の数】基本

▶解答◀ $\dfrac{8!}{5!2!1!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{2\cdot1}=\mathbf{168}$ **通り**

（2）数学Ⅱ【最大値・最小値】基本

▶解答◀ $2^x=t$ とおくと，$t>0$ で，$y=t^3-24t+2$

$f(t)=t^3-24t+2$ とおくと，$f'(t)=3t^2-24$

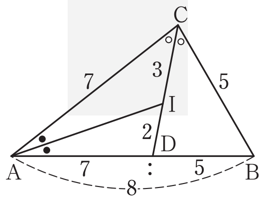
t	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

よって，$t=2\sqrt{2}$，すなわち，$x=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$ のとき，最小値をとる．

（3）数学A【三角形の基本性質】基本

▶解答◀ CD は ∠C の 2 等分線であるから，

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=7:5$$



さらに，AI は ∠A の 2 等分線であるから，

$$\mathrm{DI}:\mathrm{IC}=\mathrm{DA}:\mathrm{AC}=\frac{7}{12}\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

$$=\frac{7}{12}\cdot8:7=2:3$$

よって，$\triangle\mathrm{ADI}=\dfrac{2}{2+3}\triangle\mathrm{ADC}$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{7+5}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{7}{30}\triangle\mathrm{ABC}$$

したがって，$\mathbf{\dfrac{7}{30}}$ **倍**

（4）数学Ⅱ【定積分】基本

▶解答◀ $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+2)(x-3)\,dx$

$$=\int_{-1}^{2}(x^2-x-6)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{8-(-1)}{3}-\frac{4-1}{2}-6\{2-(-1)\}$$

$$=3-\frac{3}{2}-18=\mathbf{-\frac{33}{2}}$$

（5）数学Ⅰ【三角比の基本性質】標準

▶解答◀ 1 つ目の空欄は「A を消去せよ」と考える．

$$\cos A=\cos B\cos C \quad\cdots\cdots①$$

$$\sin A=\frac{\sin B}{\sin D} \quad\cdots\cdots②$$

$①^2+②^2$ より

$$1=\cos^2 B\cos^2 C+\frac{\sin^2 B}{\sin^2 D}$$

$\tan B$ を作るために，左辺の 1 を $\cos^2 B+\sin^2 B$ にする．

$$\cos^2 B+\sin^2 B=\cos^2 B\cos^2 C+\frac{\sin^2 B}{\sin^2 D}$$

$$\cos^2 B(1-\cos^2 C)=\sin^2 B\left(\frac{1}{\sin^2 D}-1\right)$$

$\cos^2 B$ で割って

$$\sin^2 C=(\tan^2 B)\cdot\frac{\cos^2 D}{\sin^2 D}$$

$$\sin C=(\tan B)\cdot\frac{1}{\tan D}$$

$$\sin C\tan D=\mathbf{\tan B} \quad\cdots\cdots③$$

② ÷ ① より

$$\tan A=\frac{\tan B}{\sin D\cos C}$$

③ を用いて B を消去すると

$$\tan A=\frac{\sin C\tan D}{\sin D\cos C}$$

右辺の $\sin D$ を約分して $\cos D$ をかけると

$$\tan A\cos D=\mathbf{\tan C}$$

注意 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

の左辺から右辺を導く方法で，現在の教科書は $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ を用いるように教える．これはヘタな方法で，習ってからしばらくしてやらせると右往左往する生徒が多い．

伝統的な手法は分母に 1 を見て 1 を $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ でおきかえる．$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\cos 2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

とする．「次数をそろえるために 1 を $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ でおきかえ，2 次の同次形をつくる」のである．

$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ を有効なテクニックだとすることがいけないのは，コスとサインのバランスをくずしていることにある．

（6）数学A【約数と倍数】標準

▶解答◀ $\sqrt{n^2+63}=m$ とおくと，m は 8 以上の整数で

$$n^2+63=m^2$$

$$(m+n)(m-n)=63$$

$m+n>m-n\geqq1$

$$(m+n,\ m-n)=(63,\ 1),\ (21,\ 3),\ (9,\ 7)$$

$$(m,\ n)=(32,\ 31),\ (12,\ 9),\ (8,\ 1)$$

自然数 n は **3** 個ある．

（７） 数学Ⅱ【指数・対数方程式】標準

▶解答◀ 真数条件より

$$11-2x>0,\ 1-x>0,\ 1+x>0,\ x+2>0$$

まとめると，$-1<x<1$ ……………………………………①

与式より

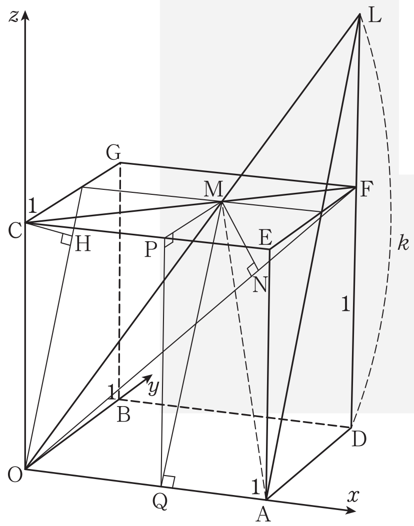
$$\log_{2023}(11-2x)-\log_{2023}(1-x)$$
$$-\log_{2023}(1+x)$$
$$=\log_{2023}(x+2)-2\log_{2023}(x+1)$$
$$\log_{2023}(11-2x)+\log_{2023}(1+x)$$
$$=\log_{2023}(x+2)+\log_{2023}(1-x)$$
$$\log_{2023}(11-2x)(1+x)$$
$$=\log_{2023}(x+2)(1-x)$$
$$(11-2x)(1+x)=(x+2)(1-x)$$
$$x^2-10x-9=0$$

① を満たす解を求めて，$x=\mathbf{5-\sqrt{34}}$

2

数学B【ベクトルと図形（空間）】標準

▶解答◀ 図のように座標軸を設定する．



$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ である．$\mathrm{DF}=1$ であるから $\mathrm{DL}=k$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(1,\ 1,\ k)$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(t,\ t,\ kt)$ とおけて，M の z 座標が 1 であるから $t=\dfrac{1}{k}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{k}(1,\ 1,\ k)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boldsymbol{\frac{1}{k}\vec{a}+\frac{1}{k}\vec{b}+\vec{c}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{k^2+2}}{k}}$$

（１） M から xz 平面に下ろした垂線の足を P，x 軸に下ろした垂線の足を Q とする．

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{k},\ 0,\ 1\right),\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{k},\ 0,\ 0\right)$ である．

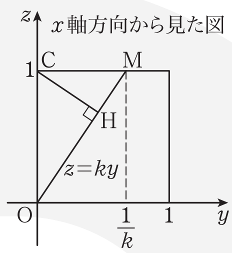
$$\cos\angle\mathrm{AOM}=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OM}}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{\sqrt{k^2+2}}{k}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{k^2+2}}}$$

$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ と平面 $\mathrm{OAM}: z=ky$ の距離（実質点と直線の距離の公式である）より $\mathrm{CH}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}}$

四面体 OAMC の体積を［OAMC］で表す．

四面体 OAMC は底面を三角形 OAC にする．

$$[\mathrm{OAMC}]=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAC}\cdot\mathrm{MP}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}=\boldsymbol{\frac{1}{6k}}$$



（２） $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=s\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=s(1,\ 1,\ 1)$ とおけて，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\left(s-\frac{1}{k},\ s-\frac{1}{k},\ s-1\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 1,\ 1)$$

内積をとり $s-\dfrac{1}{k}+s-\dfrac{1}{k}+s-1=0$ であり

$$s=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{k}+1\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\boldsymbol{\frac{k+2}{3k}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$$

$\mathrm{N}(s,\ s,\ s)$ と平面 $\mathrm{ABC}: x+y+z=1$ との距離を h とする．

$$h=\frac{|s+s+s-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{k\sqrt{3}}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[\mathrm{ABCN}]=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h=\boldsymbol{\frac{1}{3k}}$$

♦別解♦ （１） $\mathrm{OL}:\mathrm{OM}=\mathrm{DL}:\mathrm{DF}=k:1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{k}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DL}})$$

$$=\frac{1}{k}(\vec{a}+\vec{b}+k\vec{c})=\boldsymbol{\frac{1}{k}\vec{a}+\frac{1}{k}\vec{b}+\vec{c}}$$

図 1 は平面 ODL に垂直な方向から見た図である．

図1

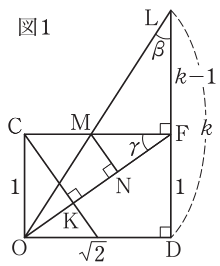


図2

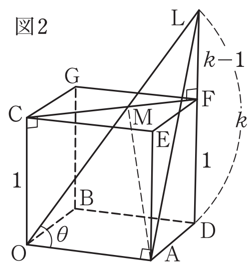


図 2 または図 3 を見よ．$\mathrm{AL}=\sqrt{k^2+1}$

$\angle\mathrm{OAL}=90^\circ$ であるから，

$$\mathrm{OL}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{AL}^2}=\sqrt{k^2+2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\left|\frac{1}{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{k^2+2}}{k}}$$

（２）　$\theta=\angle\mathrm{AOL}$ とする．

$$\cos\angle\mathrm{AOM}=\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OL}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{k^2+2}}}$$

$$\triangle\mathrm{AOM}=\frac{1}{2}\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OA}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{k^2+2}}{k}\cdot1\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{k^2+2}}{k}\sqrt{1-\frac{1}{k^2+2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{k^2+1}}{2k}}$$

図3

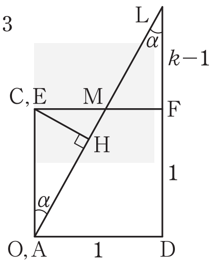


図 3 は AO の方向から見た図である．

$\angle\mathrm{ALD}=\alpha$ とおく．

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OL}}=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$\mathrm{CH}=\mathrm{OC}\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}}$$

四面体 OAMC の体積を [OAMC] で表す．

$$[\mathrm{OAMC}]=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AOM}\cdot\mathrm{CH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{k^2+1}}{2k}\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\boldsymbol{\frac{1}{6k}}$$

（３）　図 1 にもどれ．

$\angle\mathrm{OLD}=\beta$, $\angle\mathrm{OFC}=\gamma$ とおく．

$$\tan\beta=\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{LD}}=\frac{\sqrt{2}}{k},\ \cos\gamma=\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{OF}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{MF}=\mathrm{LF}\tan\beta=\frac{k-1}{k}\sqrt{2}$$

$$\mathrm{NF}=\mathrm{MF}\cos\gamma=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{ON}=\mathrm{OF}-\mathrm{NF}=\sqrt{3}-\frac{2k-2}{\sqrt{3}k}=\frac{k+2}{\sqrt{3}k}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OF}}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\boldsymbol{\frac{k+2}{3k}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$$

C から OF におろした垂線の足を K とする．

$$\mathrm{FK}=\mathrm{CF}\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{KN}=\mathrm{FK}-\mathrm{NF}=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2k-2}{\sqrt{3}k}=\frac{2}{\sqrt{3}k}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[\mathrm{ABCN}]=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{KN}=\boldsymbol{\frac{1}{3k}}$$

3　数学B【漸化式】標 準

▶解答◀　（１）　$a_2=4|a_1-1|$

$$=4\left|\frac{41}{32}-1\right|=\frac{9}{8}$$

$$a_3=4|a_2-1|=4\left|\frac{9}{8}-1\right|=\frac{1}{2}$$

$$a_4=4|a_3-1|=4\left|\frac{1}{2}-1\right|=\boldsymbol{2}$$

（２）　$a_2=4|a_1-1|=4\left|\frac{47}{64}-1\right|=\frac{17}{16}$

$$a_3=4|a_2-1|=4\left|\frac{17}{16}-1\right|=\frac{1}{4}$$

$$a_4=4|a_3-1|=4\left|\frac{1}{4}-1\right|=\boldsymbol{3}$$

（３）　$a=4|a-1|$

$a\geqq0$ かつ $a=4a-4$ または $a=4-4a$

$$a=\boldsymbol{\frac{4}{5},\ \frac{4}{3}}$$

（４）　$a>\frac{4}{3}$ のとき，つねに $a_n>\frac{4}{3}$ が成り立つことを証明する．$n=1$ のとき成り立つ．$n=k$ で成り立つとする．このとき $a_k>\frac{4}{3}$

$$a_{k+1}=4|a_n-1|$$

$$a_{k+1}=4(a_k-1)$$

$$a_{k+1}-\frac{4}{3}=4\left(a_k-\frac{4}{3}\right)>0$$

である．$n=k+1$ でも成り立つから，数学的帰納法により証明された．

$a_{n+1}-\frac{4}{3}=4\left(a_n-\frac{4}{3}\right)$ がつねに成り立ち，数列 $\left\{a_n-\frac{4}{3}\right\}$ は等比数列である．

$$a_n-\frac{4}{3}=\left(a_1-\frac{4}{3}\right)4^{n-1}$$

$$a_n=\boldsymbol{\left(a-\frac{4}{3}\right)4^{n-1}+\frac{4}{3}}$$

（５）　$a_2=4|a-1|$

$n\geqq2$ のとき，つねに $a_n=\frac{4}{5}$ ならば

$$\frac{4}{5}=4|a-1|$$

$a-1=\pm\frac{1}{5}$ で，$a=\frac{4}{5},\ \frac{6}{5}$

$a_1\neq\frac{4}{5}$ のとき，$a=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$

このとき $n\geqq2$ でつねに $a_n=\frac{4}{5}$ になることは，論述問題ではないから証明の必要はなかろう．

（６）　$a_2=4|a-1|$

$$a_3=4|a_2-1|$$

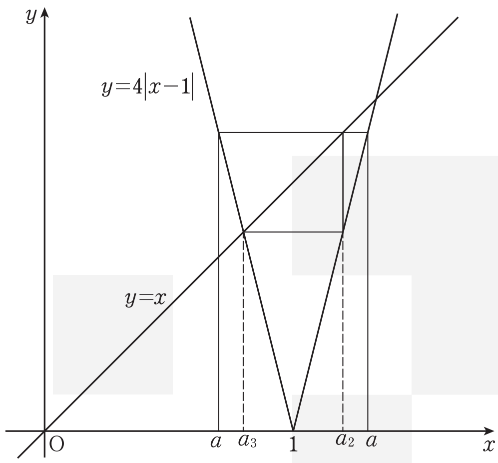
$n \geqq 3$ のとき，つねに $a_n = \dfrac{4}{5}$ ならば

$$\frac{4}{5} = 4|a_2 - 1|$$

$a_2 = \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{5}$ であり，$a_2 \neq \dfrac{4}{5}$ より $a_2 = \dfrac{6}{5}$

$$\frac{6}{5} = 4|a - 1|$$

$$a - 1 = \pm\frac{3}{10} \qquad \therefore \quad a = \boldsymbol{\frac{7}{10}, \frac{13}{10}}$$



図のように定まる．

要の分析　数 III が，出題範囲ではなくなり，全体的に易しくなったが，それでも十分に手数が多いし，考えさせる問題（**1**(5)）もある．

（三輪，田中博，細川，前田拓，安田亨）