埼玉医科大学・後期

試験日　2023年3月4日　時間50分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1） $\sin\frac{5}{12}\pi$ は，整数を係数とする t の4次方程式

$$\square t^4-\square t^2+1=0$$

を満たす．この方程式を満たす t をすべて求めると，

$$t=\pm\frac{\sqrt{\boxed{ア}}+\sqrt{\boxed{イ}}}{\square},\ \pm\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}-\sqrt{\boxed{エ}}}{\square}$$

である．ただし，$\boxed{ア}>\boxed{イ}$ かつ $\boxed{ウ}>\boxed{エ}$ とする．

（2） 座標平面上に4点 A$(-1,\,1)$, B$(-1,\,-1)$, C$(1,\,-1)$, D$(1,\,1)$ からなる正方形 ABCD があり，x 軸上に2点 P$(-a,\,0)$, Q$(a,\,0)$ をとる．ただし，$a>0$ とする．このとき，$L=\mathrm{PQ}+\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{QC}+\mathrm{QD}$ が最小値をとるのは

$$a=\square-\frac{\sqrt{\square}}{\square}$$

のときであり，最小値は

$$L=\square\left(\square+\sqrt{\square}\right)$$

である．

2 定義域が実数全体である関数 $y=2x^3-3x^2+2x$ の逆関数を $y=g(x)$ とする．

（1） $g(8)=\square$ であり，$g'(8)=\frac{\square}{\square}$ である．

（2） 曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標の値を小さい順に並べると，$\square$, $\frac{\square}{\square}$, $\square$ である．

（3） 曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積は $\frac{\square}{\square}$ である．

3 AB を底辺とする高さが5の平行四辺形 ABCD において，AB $=3$, BC $=6$, BC を $2:1$ に内分する点を E，CD を $2:1$ に内分する点を F とする．また，AC と EF の交点を G，AD の延長と EF の延長の交点を H とする．

（1） $\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}}=\frac{\square}{\square}$ である．

（2） $\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AG}}=\frac{\square}{\square}$ である．

（3） $\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{GF}}=\frac{\square}{\square}$ である．

（4） △CFG の面積は $\frac{\square}{\square}$ である．

4 日本には十干十二支（じっかんじゅうにし）で暦を表す方法がある．十干は甲（きのえ），乙（きのと），丙（ひのえ），丁（ひのと），戊（つちのえ），己（つちのと），庚（かのえ），辛（かのと），壬（みずのえ），癸（みずのと）の順に全部で10種類あり，表にすると

十干

順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
種類	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸

である．また，十二支は子(ね)，丑(うし)，寅(とら)，卯(う)，辰(たつ)，巳(み)，午(うま)，未(ひつじ)，申(さる)，酉(とり)，戌(いぬ)，亥(い)の順に全部で 12 種類があり，表にすると

十二支

順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
種類	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥

である．

十干と十二支を組み合わせて年を表す方法は次のようになる．西暦 2022 年は十干十二支で表すと「壬寅」の年で，西暦 2023 年は十干と十二支が 1 つずつ進み，「癸卯」の年になる．十干も十二支も最後まで行くと次は最初に戻る．したがって西暦 2024 年は十干が最初に戻って「甲辰」の年になる．以下では，十干十二支と西暦の関係について，このルールが例外なく適用できるものとする．

(1)「甲子」の年から数えて最初の「乙卯」の年は $\square$ 年後である．

(2) 大化の改新が始まったとされる年(西暦 645 年)に一番近い「甲子」の年は西暦 $\square$ 年である．

1

(1) 数学II【加法定理とその応用】標準

▶解答◀ $\sin\frac{5}{12}\pi = t$ とおく．

$$\cos\frac{5}{6}\pi = 1 - 2\sin^2\frac{5}{12}\pi$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2t^2$$

両辺 2 乗して

$$\frac{3}{4} = 1 - 4t^2 + 4t^4$$

$$\boldsymbol{16t^4 - 16t^2 + 1 = 0}$$

$$t^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{16} = \frac{8 \pm 2\sqrt{12}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$t = \pm\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$t = \boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

(2) 数学III【最大値・最小値】標準

▶解答◀ $\mathrm{PA} = \sqrt{1+(1-a)^2} = \sqrt{a^2-2a+2}$

$\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \mathrm{QC} = \mathrm{QD}$ であるから

$$L = 4\sqrt{a^2-2a+2} + 2a$$

これを $f(a)$ とおく．

$$f'(a) = 4\cdot\frac{2a-2}{2\sqrt{a^2-2a+2}} + 2$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{a^2-2a+2} - 2(1-a)}{\sqrt{a^2-2a+2}}$$

$a \geqq 1$ のとき $f'(a) > 0$ である．

$a < 1$ のとき，分子の有理化をして

$$f'(a) = 2\cdot\frac{(a^2-2a+2) - 4(1-a)^2}{\sqrt{a^2-2a+2}\left\{\sqrt{a^2-2a+2} + 2(1-a)\right\}}$$

(分母) > 0 である．(分子) $= -(3a^2-6a+2)$

$f'(a) = 0$ とすると $a = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

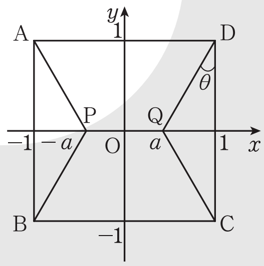
増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$a = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$ のとき最小値

$$f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 4\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} + 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{2(1+\sqrt{3})}$$



♦別解♦ $\angle\mathrm{CDQ} = \theta\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\mathrm{DQ} = \frac{1}{\cos\theta}$, $\mathrm{EQ} = \tan\theta$ である．$L = L(\theta)$ とおく．

$$L(\theta) = 4\cdot\frac{1}{\cos\theta} + 2(1-\tan\theta)$$

$$L'(\theta) = 4\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2}{\cos^2\theta} = \frac{2(2\sin\theta - 1)}{\cos^2\theta}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$L'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$L(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき L は最大となる．このとき，

$$a = 1 - \tan\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$L\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \boldsymbol{2(1+\sqrt{3})}$$

2 数学Ⅲ【面積】標 準

▶解答◀ （1）　$y=2x^3-3x^2+2x$ の逆関数について，x と y を入れ替えて

$$x=2y^3-3y^2+2y$$

である．$x=8$ のとき

$$8=2y^3-3y^2+2y$$

$$(y-2)(2y^2+y+4)=0 \qquad \therefore \quad y=2$$

よって，$g(8)=\mathbf{2}$

$$\frac{dx}{dy}=6y^2-6y+2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{6y^2-6y+2}$$

$g'(8)$ を求める．$x=8$ のとき $y=2$ であるから代入して

$$g'(8)=\frac{1}{24-12+2}=\mathbf{\frac{1}{14}}$$

（2）　$x=2y^3-3y^2+2y$ と $y=x$ を連立して

$$x=2x^3-3x^2+2x$$

$$x(2x^2-3x+1)=0$$

$$x(2x-1)(x-1)=0 \qquad \therefore \quad x=\mathbf{0,\ \frac{1}{2},\ 1}$$

（3）　元の関数 $y=2x^3-3x^2+2x$ と逆関数 $y=g(x)$ は $y=x$ に関して対称であることから，グラフは図 1 のようになる．

ただし，これは元の関数 $y=f(x)$ が増加関数であるから成り立つことである．それを確認しておこう．

$f(x)$ が増加関数だと $f^{-1}(x)$ も増加関数である．

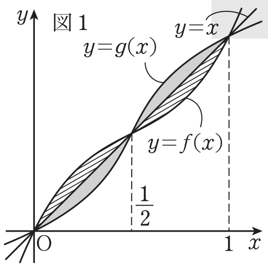
$f(x)>x$ のとき $f(f(x))>f(x)>x$

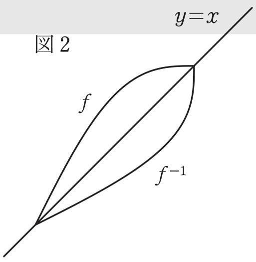
$$f(f(x))>x$$

f^{-1} をかぶせて $f(x)>f^{-1}(x)$

$f(x)<x$ のとき $f(f(x))<f(x)<x$

$$f(x)<f^{-1}(x)$$





求める面積は図 1 の網目部分である．元の関数 $y=2x^3-3x^2+2x$ と $y=x$ で囲まれた部分の面積と等しいから，図 1 の斜線部分の面積を計算して

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\{(2x^3-3x^2+2x)-x\}\,dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{x-(2x^3-3x^2+2x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^3-3x^2+x)\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^3-3x^2+x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=2\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)-0-\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{1}{16}}$$

3 数学A【図形の雑題】標 準

▶解答◀ （1）　$\triangle\mathrm{DFH}\backsim\triangle\mathrm{CFE}$ より

$$\mathrm{DH}:\mathrm{CE}=\mathrm{DF}:\mathrm{CF}=1:2$$

$\mathrm{EC}=2$ より，$\mathrm{DH}=1$ であるから，$\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

（2）　$\triangle\mathrm{AGH}\backsim\triangle\mathrm{CGE}$ より

$$\mathrm{AG}:\mathrm{CG}=\mathrm{AH}:\mathrm{CE}=7:2$$

$$\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AG}}=\mathbf{\frac{2}{7}}$$

（3）　$\triangle\mathrm{DFH}\backsim\triangle\mathrm{CFE}$ より，$\mathrm{HF}:\mathrm{EF}=1:2$

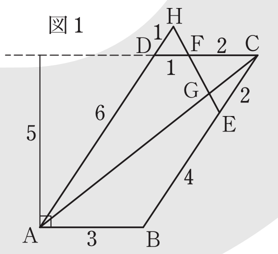
$\triangle\mathrm{AGH}\backsim\triangle\mathrm{CGE}$ より，$\mathrm{HG}:\mathrm{EG}=7:2$ であるから

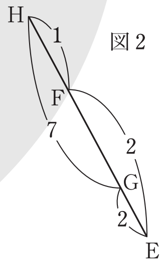
$$\mathrm{HF}:\mathrm{FG}:\mathrm{GE}=3:4:2$$

$$\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{GF}}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

（4）　$\triangle\mathrm{CFG}=\triangle\mathrm{ACD}\times\dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{DC}}\cdot\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AC}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{10}{9}}$$





4 数学A【不定方程式】標 準

▶解答◀ （1）　「乙卯」の年は，周期が 10 の十干で 2 番目，周期が 12 の十二支で 4 番目である．「甲子」の年を 1 年目として，「乙卯」を x 年目とおくと

$$x\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 10)\ \text{かつ}\ x\equiv4\ (\mathrm{mod}\ 12)$$

整数 $a,\,b$ を用いて

$$x=10a+2=12b+4$$

$$10a-12b=2 \qquad \therefore \quad 5a-6b=1$$

$$a=\frac{6b+1}{5}=b+\frac{b+1}{5}$$

$a,\,b$ は整数であるから $\dfrac{b+1}{5}$ も整数である．

$\dfrac{b+1}{5}=k$ とおくと

$$b=5k-1$$

$$x=12(5k-1)+4=60k-8$$

「乙卯」となる最初の年であるから $k=1$ のとき $x=52$ となる．「甲子」の年から数えて $52-1=$ **51**(年後) である．

（**2**） 西暦 y 年について，十干十二支で「cd」と表されるとする．(十干で c 番目，十二支で d 番目の種類のものを用いている状態)

西暦 2022 年が「壬寅」であり，$2022\equiv 2\pmod{10}$，$2022\equiv 6\pmod{12}$ であるから

$$y\equiv c-7\pmod{10} \text{ かつ } y\equiv d+3\pmod{12}$$

「甲子」となる年は $c=1,\ d=1$ のときで

$$y\equiv -6\pmod{10} \text{ かつ } y\equiv 4\pmod{12}$$

整数 $p,\ q$ を用いて

$$y=10p-6=12q+4$$

$$10p-12q=10 \qquad \therefore\quad 5p-6q=5$$

$$p=\frac{6q+5}{5}=q+1+\frac{q}{5}$$

$p,\ q$ は整数であるから $\dfrac{q}{5}$ も整数である．

$\dfrac{q}{5}=l$ とおくと，$q=5l$

$$y=12\cdot 5l+4=60l+4$$

整数 l の中で $y=645$ に最も近くなるのは $l=11$ として

$$y=60\cdot 11+4=664$$

よって西暦 **664** 年

◆別解◆　ユークリッドの互除法を用いて解くと次のようになる．以下，文字は整数とする．

（**1**） $5a-6b=1$ ……①

$a=-1,\ b=-1$ はこれをみたすから

$$5(-1)-6(-1)=1 \quad \text{……②}$$

①－② より

$$5(a+1)-6(b+1)=0$$

$$5(a+1)=6(b+1)$$

5 と 6 は互いに素であるから

$$a+1=6k,\ b+1=5k$$

（**2**） $5p-6q=5$ ……③

$p=-5,\ q=-5$ はこれをみたすから

$$5(-5)-6(-5)=5 \quad \text{……④}$$

③－④ より

$$5(p+5)-6(q+5)=0$$

$$5(p+5)=6(q+5)$$

5 と 6 は互いに素であるから

$$p+5=6l,\ q+5=5l$$

要の分析　**4** がよく題意を把握しなければならず解きづらい．(１) は地道に数えても解ける．**2** の逆関数はシンプルだが，受験生は苦手とする者も多いので，練習しておこう．

（有山，染矢，安田亨）