埼玉医科大学・前期

試験日　2023 年 1 月 31 日　時間 50 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1） a, b, p を正の整数とし，$f(x) = ax^2 - px + b$ とする．$y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(3, 11), (-3, 35)$ を通るとき，$p = \boxed{}$ である．そのときに，$-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値が 11，最小値が 3 であるなら，$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ である．

（2） 平面上の △ABC において辺 AB を $m:n$ に外分する点を P，辺 BC を 2 : 5 に内分する点を Q，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を R とする．3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，$\dfrac{m}{n} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ であり，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

2 $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\cos x}{\sin x} + 1\right) dx$ とする．

（1） 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\} dx$ において，変数 x を $x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \theta$ により θ を置き換え，再び θ を x と書き換えることで

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\boxed{\text{ア}}\right) dx$$

と変形できる．

$\boxed{\text{ア}}$ に入る最も適切なものを，次の ①～⑧ のうちから 1 つ選べ．

① x^2　② $\sqrt{x}$　③ e^x　④ $\sin x$

⑤ $\cos x$　⑥ $\tan x$　⑦ $\dfrac{1}{x}$　⑧ $\cos 2x$

（2） 任意の実数 x に対して，$\sin x + \cos x = \sqrt{\boxed{}}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{\boxed{}}\right)$ が成り立つ．

（3） $I = \dfrac{\pi}{\boxed{}}\log\boxed{}$ である．

3 図 1 のような，座標平面上の長方形の領域 $D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq d,\ 0 \leqq y \leqq n + \dfrac{1}{2} - d\right\}$ を考える．ただし，n は定数で，2 以上の自然数である．また，d は $1 \leqq d \leqq n$ の実数値をとる変数である．x 座標，y 座標ともに自然数である点 (図 1 の黒丸) の中で D に含まれるものの個数は，d とともに変化するので，これを d の関数とみなして $m(d)$ と表す．

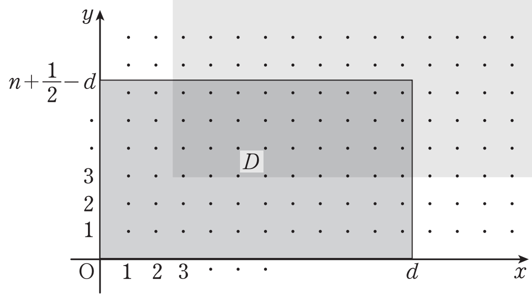


図 1：黒丸は x 座標，y 座標がともに自然数である点を表す．

（1） $m(1) = \boxed{\text{ア}}$, $m\left(\dfrac{3}{2}\right) = \boxed{\text{イ}}$, $m(2) = \boxed{\text{ウ}}$ である．また，$\displaystyle\lim_{d \to \frac{3}{2}+0} m(d) = \lim_{d \to 2-0} m(d) = \boxed{\text{エ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$ に入る最も適切なものを，次の ①～⑧ のうちからそれぞれ 1 つずつ選べ．同じものを繰り返し選

んでもよい．

① $n-2$　② $n-1$　③ n　④ $n+1$

⑤ $2n-4$　⑥ $2n-2$　⑦ $2n$　⑧ $2n+2$

（２） k を $n-1$ 以下の自然数とする．$k \leqq d \leqq k+\dfrac{1}{2}$ のとき，$m(d)=\boxed{\text{オ}}$ である．

また，$k+\dfrac{1}{2}<d<k+1$ のとき，$m(d)=\boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に入る最も適切なものを，次の ①～⑧ のうちからそれぞれ１つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよい．

① $n-k$　② $nk-1$　③ $nk-2k$　④ $nk-k^2$

⑤ nk　⑥ $2nk-k^2$　⑦ $2nk-2k$　⑧ $nk-k^2-k$

（３） $n=17$ のとき，$m(d)$ の最大値は $\boxed{}$ である．

4　４枚のコインを同時に投げ，表が出たコインの枚数を数えることを４回繰り返した．

（１） ４回のすべてで表が出るコインの枚数が２以上になる確率は $\left(\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)^4$ である．

（２） ４回の中で表が出るコインの枚数の最小値が２である確率は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

（３） ４回の中で表が出るコインの枚数の最小値が２，かつ最大値が４である確率は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

1

（１） 数学Ⅰ【２次関数】標 準

▶解答◀ $f(3)=11,\ f(-3)=35$ より

$$11=9a-3p+b \quad \cdots\cdots ①$$

$$35=9a+3p+b \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より，$-24=-6p$ であり，$p=\mathbf{4}$

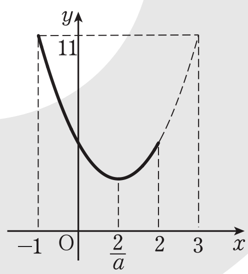
これを ① に代入して，$b=23-9a$ となり，

$$f(x)=ax^2-4x+23-9a$$

$$=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+23-9a$$

となる．a は正の整数であるから $0<\dfrac{2}{a}\leqq 2$ である．$x=\dfrac{2}{a}$ は $-1\leqq x\leqq 2$ を満たすから最小値は $f\left(\dfrac{2}{a}\right)$ である．$-\dfrac{4}{a}+23-9a=3$ であり，$9a^2-20a+4=0$ となる．$(9a-2)(a-2)=0$ となり，正の整数 $a=\mathbf{2}$ である．$b=23-9a=\mathbf{5}$ となり，a,b,p は確かにすべて正の整数になる．$f(x)=2x^2-4x+5$ となる．$f(-1)=11>f(2)=5$ であるから，最大値の条件も成り立つ．

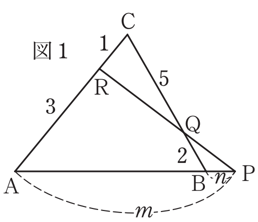
注意 ①，② を「文字が a,b,p の３つあり，式が２つあるから，２つを他で表す」と読む．p は決定するが「p,b を a で表した」結果が $p=4$，$b=23-9a$ である．最大値が 11 という条件は使わない．「使わなくても答えが確定する条件」を過剰条件という．最小値のことしか書かないと方針が定まり過ぎるから，方針を定めにくくするために書いたのだろう．実は「a,b,p を正の整数」だから $b=23-9a>0$ で $a=1$ または２と絞られる．ここまでくると過剰条件過ぎて，残念な問題になり下がってしまう．



（２） 数学A【メネラウスの定理・チェバの定理】基 本

▶解答◀ AB を水平に描く．もし $\dfrac{\text{CR}}{\text{RA}}=\dfrac{\text{CQ}}{\text{QB}}$ ならRQ と AB が平行になる．今は $\dfrac{\text{CR}}{\text{RA}}<\dfrac{\text{CQ}}{\text{QB}}$ だから R が上のほうに持ち上がっている感じで，直線 RQ は Q 方向への延長上で，直線 AB と交わる．

図１



△ABC と直線 PR についてメネラウスの定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore\quad \frac{m}{n}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

△APR と直線 BC についてメネラウスの定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QR}}\cdot\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{CA}}=1$$

$$\frac{13}{2}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QR}}\cdot\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore\quad \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}}=\frac{13}{8}$$

$$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}}=\frac{8+13}{8}=\boldsymbol{\frac{21}{8}}$$

2　数学Ⅲ【定積分】標 準

▶解答◀　（1）　$x+\frac{\pi}{4}=\pi-\theta$ とおく．$dx=-d\theta$

x	$\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$
θ	$\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{4}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\log\{\sin(\pi-\theta)\}(-d\theta)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin\theta)\,d\theta=\boldsymbol{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx}$$

（2）　$\sin x+\cos x=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

（3）　$I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{\log(\sin x+\cos x)-\log(\sin x)\}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\log\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}-\log(\sin x)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\sqrt{2}\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx$$

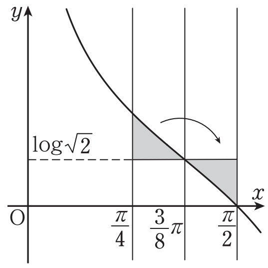
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\log 2\,dx=\frac{1}{2}\log 2\Big[\,x\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}\log 2}$$

注意　【置換積分の図形的意味】

$x+\frac{\pi}{4}=\pi-\theta$ という置換により，積分区間の真ん中である $x=\frac{3}{8}\pi$ での対称性を活かして積分を考えている．

$f(x)=\log\left(\frac{\cos x}{\sin x}+1\right)$ は $\left(\frac{3}{8}\pi,\log\sqrt{2}\right)$ で点対称になっている．下図を見よ．$x=\frac{\pi}{4}$, $y=f(x)$, $y=\log\sqrt{2}$ とで囲まれた部分の面積をクルッと回転させ，はめ込むことで，長方形の面積で計算できるということである．



3　数学B【数列の雑題】標 準

▶解答◀　（1）　$d=1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq(n-1)+\frac{1}{2}$ をみたす自然数の組 (x,y) の個数は

$$m(1)=1(n-1)=\boldsymbol{n-1}\quad(②)$$

$d=\frac{3}{2}$ のとき $0\leqq x\leqq 1+\frac{1}{2}$, $0\leqq y\leqq n-1$ をみたす自然数の組 (x,y) の個数は

$$m\left(\frac{3}{2}\right)=1(n-1)=\boldsymbol{n-1}\quad(②)$$

$d=2$ のとき $0\leqq x\leqq 2$, $0\leqq y\leqq(n-2)+\frac{1}{2}$ をみたす自然数の組 (x,y) の個数は

$$m(2)=2(n-2)=\boldsymbol{2n-4}\quad(⑤)$$

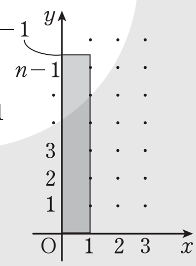


図 1

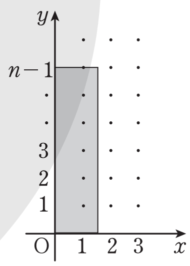


図 2

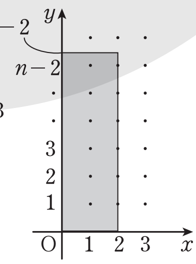


図 3

$d\to\frac{3}{2}+0$ のとき．$0\leqq y\leqq n+\frac{1}{2}-d$ の右辺は限りなく $n-1$ に近づく（$n-1$ の値は取れない）から

$$m(d)=1(n-2)=n-2$$

$d\to 2-0$ のとき．$0\leqq x\leqq d$ の右辺は限りなく 2 に近づく（2 の値は取れない）から

$$m(d)=1(n-2)=n-2$$

以上より

$$\lim_{d \to \frac{3}{2}+0} m(d) = \lim_{d \to 2-0} m(d) = \boldsymbol{n-2} \quad (①)$$

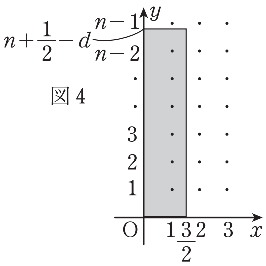


図4

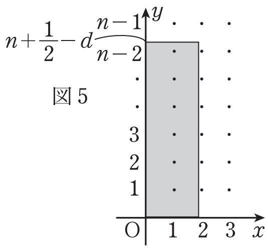


図5

（**2**）　$k \leqq d \leqq k+\frac{1}{2}$ のとき

$n-k \leqq n+\frac{1}{2}-d \leqq n+\frac{1}{2}-k$ であるから，$0 \leqq x \leqq k$，$0 \leqq y \leqq n-k$ をみたす自然数の組 (x, y) の個数は

$$m(d) = k(n-k) = \boldsymbol{nk-k^2} \quad (④)$$

$k+\frac{1}{2} < d < k+1$ のとき

$n-k-\frac{1}{2} < n+\frac{1}{2}-d < n-k$ であるから，$0 \leqq x \leqq k$，$0 \leqq y \leqq n-k-1$ をみたす自然数の組 (x, y) の個数は

$$m(d) = k(n-k-1) = \boldsymbol{nk-k^2-k} \quad (⑧)$$

（**3**）　$n=17$ のとき．（２）を利用する．k を 16 以下の自然数とする．

（ア）　$k \leqq d \leqq k+\frac{1}{2}$ のとき

$$m(d) = 17k-k^2 = -\left(k-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{289}{4}$$

$k=8$ または 9 のとき最大値 72 をとる．

（イ）　$k+\frac{1}{2} < d < k+1$ のとき

$$m(d) = 17k-k^2-k = -(k-8)^2+64$$

$k=8$ のとき最大値 64 をとる．

（ウ）　$d=17$ のとき $m(17)=0$

以上より，$m(d)$ の最大値は **72** である．

4　数学A【独立試行・反復試行の確率】標準

▶解答◀　（**1**）　4 枚のコインを同時に投げる試行で，表が k 枚出る確率を p_k とする．$p_k = \frac{{}_4\mathrm{C}_k}{2^4}$ である．1 回の試行で表が出るコインの枚数が 2 枚以上になる確率は

$$p_2+p_3+p_4 = \frac{1}{2^4}({}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4)$$

$$= \frac{1}{2^4}(6+4+1) = \frac{11}{16}$$

よって，4 回のすべてで表が出るコインの枚数が 2 枚以上になる確率は $\left(\boldsymbol{\frac{11}{16}}\right)^4$

（**2**）　4 回とも表が 2 枚か 3 枚か 4 枚出る事象を A とし，このうち表が 2 枚出ない（3 枚か 4 枚出る）事象を B とする．（１）の結果より

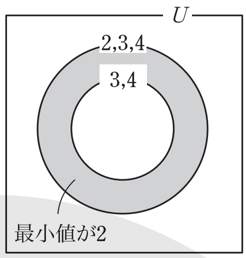
$$P(A) = \left(\frac{11}{16}\right)^4,\ P(B) = (p_3+p_4)^4 = \left(\frac{5}{16}\right)^4$$

4 回の中で表が出るコインの枚数の最小値が 2 である確率は

$$P(A)-P(B) = \left(\frac{11}{16}\right)^4-\left(\frac{5}{16}\right)^4 = \frac{11^4-5^4}{16^4}$$

$$= \frac{(11^2+5^2)(11^2-5^2)}{2^{16}} = \frac{146 \cdot 96}{2^{16}}$$

$$= \frac{2 \cdot 73 \cdot 2^5 \cdot 3}{2^{16}} = \boldsymbol{\frac{219}{1024}}$$



（**3**）　事象 A のうちで，表が 4 枚出ない（2 枚か 3 枚出る）事象を C とすると

$$P(C) = (p_2+p_3)^4 = \left(\frac{10}{16}\right)^4$$

$P(B \cap C)$ は，4 回とも表が 2 枚も 4 枚も出ない（3 枚出る）確率であるから

$$P(B \cap C) = (p_3)^4 = \left(\frac{4}{16}\right)^4$$

よって，求める確率は

$$P(A)-P(B \cup C)$$

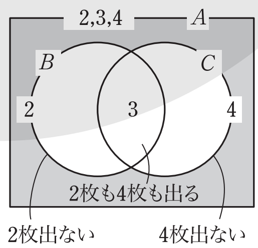
$$= P(A)-\{P(B)+P(C)-P(B \cap C)\}$$

$$= \left(\frac{11}{16}\right)^4-\left\{\left(\frac{5}{16}\right)^4+\left(\frac{10}{16}\right)^4-\left(\frac{4}{16}\right)^4\right\}$$

$$= \frac{1}{16^4}\{(11^4-10^4)-(5^4-4^4)\}$$

$$= \frac{1}{2^{16}}\{(11^2+10^2)(11^2-10^2)-(5^2+4^2)(5^2-4^2)\}$$

$$= \frac{1}{2^{16}}(221 \cdot 21-41 \cdot 9) = \frac{4272}{2^{16}} = \boldsymbol{\frac{267}{4096}}$$



要の分析　構成は例年通りである．**2** の積分計算は丁寧な誘導が付いている．**3** の格子点の問題も（１），（２）をヒントとして（３）へ誘導がある．**4** の最大値・最小値の確率は，一度は演習したことがあるだろうから，しっかりと得点したい．

（有山，染矢，安田亨）