大阪医科薬科大学・前期

試験日　2023 年 2 月 10 日　時間 100 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 座標平面上で，放物線 $C: y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\,a^2)$ と $\mathrm{B}(b,\,b^2)$ における 2 本の法線の交点を P とし，点 B を点 A に限りなく近づけたときに点 P が近づく点を Q とする．

（1） 放物線 C の点 A における法線の方程式を求めよ．

（2） Q の座標を a を用いて表せ．

（3） a が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 Q が描く曲線の長さを求めよ．

2 関数 $f(x)=e^x \sin(e^x)$ について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

（1） 曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点を，x 座標の小さい方から順に $\mathrm{A}_1,\,\mathrm{A}_2,\,\mathrm{A}_3,\,\cdots$ とし，$\mathrm{A}_n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ の x 座標を a_n とする．また，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．a_n と S_n を求めよ．

（2） A_n における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を T_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n}$ を求めよ．

（3） $a_n < x < a_{n+1}$ における曲線 $y=\left|f(x)\right|$ と曲線 $y=e^x$ との共有点を B_n とし，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$ の面積を U_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}U_n$ を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．

（1） n を 2 以上の整数とする．実数係数の n 次方程式 $f(x)=0$ が虚数解 α をもつならば，α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $f(x)=0$ の解であることを示せ．

（2） n を正の整数とする．
半径 1 の円に内接する正 $2n+1$ 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$ について，n 個の線分の長さの積
$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_0\mathrm{A}_2 \times \mathrm{A}_0\mathrm{A}_3 \times \cdots \times \mathrm{A}_0\mathrm{A}_n$ を L とする．
複素数平面上で中心 O，半径 1 の円に内接する正 $2n+1$ 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$ を考えることで，L を求めよ．

4 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれた 3 枚のカードが入っている箱と，頂点が反時計回りに A，B，C の順 に並んでいる正三角形 ABC がある．箱から 1 枚のカードを取り出し，数字を確認してからもとに戻す．このとき，点 P を以下の **〈規則〉** にしたがって正三角形の頂点を移動させ，移動した頂点に応じて文字列を作る試行を行う．文字列は左から順に文字○，×を書くものとする．

〈規則〉

- 1 回目は次のようにする．
  1 の書かれたカードが取り出されたときは点 P を頂点 A におき，文字○を書く．
  2 の書かれたカードが取り出されたときは点 P を頂点 B におき，文字×を書く．
  3 の書かれたカードが取り出されたときは点 P を頂点 C におき，文字×を書く．
- 2 回目以降は次のようにする．
  $k\,(k=1,\,2,\,3)$ の書かれたカードが取り出されたとき，点 P がおいてある頂点から反時計回りに k 個先の正三角形の頂点に移動し，移動した頂点が A のときは既にある文字列の右側に○を，移動した頂点が A 以外のときは既にある文字列の右側に×を書く．

例えば，3 回の試行において取り出されたカードに書かれた数字が順に 1, 2, 3 のとき，点 P は A → C → C と移動し，得られる文字列は○××である．この試行を $n\,(n \geqq 2)$ 回繰り返したとき，文字列中に×が連続しない確率を p_n とする．

（1） $p_2,\,p_3,\,p_4$ を求めよ．

（2） $p_n\,(n \geqq 2)$ を求めよ．

5 n を正の整数とし，$n!$ を 9 進法で表したときに末尾に並ぶ 0 の個数を $f(n)$ で表す．例えば，

$10! = 3628800 = 6740700_{(9)}$ より，$f(10) = 2$ である．
（1） $f(8)$ および $f(6789)$ の値をそれぞれ求めよ．
（2） k を 0 以上の整数とする．$f(n) = k$ のとき，$4k < n$ を示せ．
（3） $f(n) = 1000$ を満たす最小の n を求めよ．

1

数学Ⅲ【曲線の長さ】標準

▶解答◀ （1） $y = x^2$ のとき $y' = 2x$ だから，C の A における法線の方程式は，$a \neq 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2$$

$$2a(y - a^2) = -(x-a)$$

$$\boldsymbol{x + 2ay = a + 2a^3} \quad \cdots\cdots ①$$

① は $a = 0$ のときの法線の方程式 $x = 0$ も表している．

（2） C の B における法線の方程式は

$$x + 2by = b + 2b^3 \quad \cdots\cdots ②$$

①×b − ②×a より

$$(b-a)x = 2ab(a^2 - b^2)$$

$a \neq b$ であるから

$$x = -2ab(a+b) \quad \cdots\cdots ③$$

① − ② より

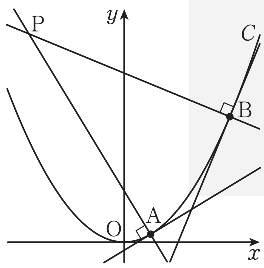
$$2(a-b)y = a - b + 2(a^3 - b^3)$$

$$y = a^2 + ab + b^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ について $b \to a$ のとき

$$x \to -2a^2 \cdot 2a,\ y \to 3a^2 + \frac{1}{2}$$

よって Q の座標は $\boldsymbol{\left(-4a^3,\ 3a^2 + \frac{1}{2}\right)}$ である．



（3） $x = -4a^3,\ y = 3a^2 + \dfrac{1}{2}$ とすると

$$\frac{dx}{da} = -12a^2,\ \frac{dy}{da} = 6a$$

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 = (-12a^2)^2 + (6a)^2$$

$$= 36a^2(4a^2 + 1)$$

求める曲線の長さは

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2}\, da$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{36a^2(4a^2+1)}\, da$$

$$= 2 \cdot 6 \int_0^1 a\sqrt{4a^2+1}\, da$$

$$= 12 \int_0^1 (4a^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{8}(4a^2+1)'\, da$$

$$= \left[(4a^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \boldsymbol{5\sqrt{5} - 1}$$

2

数学Ⅲ【面積】標準

▶解答◀ （1） $f(x) = 0,\ x > 0$ のとき

$$\sin e^x = 0,\ e^x > 1$$

$$e^x = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$$

$$x = \log\pi,\ \log 2\pi,\ \log 3\pi,\ \cdots$$

$$\boldsymbol{a_n = \log n\pi}$$

$$S_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(x)|\, dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^x |\sin e^x|\, dx$$

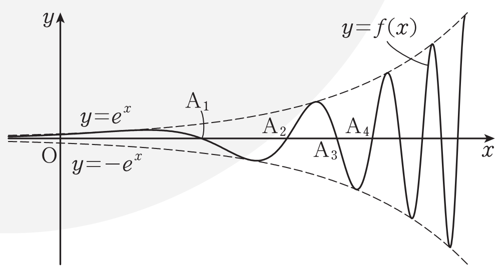
$t = e^x$ とおくと，$dt = e^x\, dx$

x	a_n → a_{n+1}
t	$n\pi$ → $(n+1)\pi$

であるから

$$S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt$$

$$= \Big[-\cos t \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{2}$$



（2） $f'(x) = e^x \sin e^x + e^x \cos e^x \cdot e^x$

$$= e^x \sin e^x + e^{2x} \cos e^x$$

であるから

$$f'(a_n) = n\pi \sin n\pi + (n\pi)^2 \cos n\pi$$

$$= (-1)^n n^2 \pi^2$$

$y = f(x)$ の A_n における接線の方程式は

$$y = (-1)^n n^2 \pi^2 (x - a_n)$$

接線の y 切片は $-(-1)^n n^2 \pi^2 a_n$ であるから

$$T_n = \frac{1}{2} a_n \cdot n^2 \pi^2 a_n = \frac{1}{2}(n\pi a_n)^2$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2$$

ここで

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\log(n+1)\pi}{\log n\pi}$$
$$=\frac{\log n\pi+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n\pi}$$
$$=1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n\pi}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n}=\mathbf{1}$$

（**3**） B_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．

$|f(x)|=e^x$ とすると

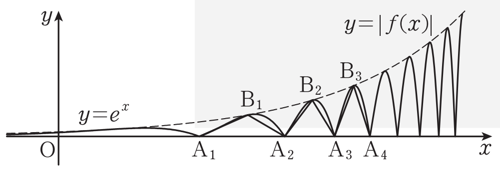
$$e^x|\sin e^x|=e^x \qquad \therefore\quad \sin e^x=\pm1$$
$$e^x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots$$
$$x=\log\frac{\pi}{2},\ \log\frac{3}{2}\pi,\ \log\frac{5}{2}\pi,\ \cdots$$

$a_n<x_n<a_{n+1}$ より　$x_n=\log\dfrac{2n+1}{2}\pi$

$$y_n=e^{x_n}=\frac{2n+1}{2}\pi$$
$$U_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)y_n$$
$$=\frac{1}{2}\{\log(n+1)\pi-\log n\pi\}\cdot\frac{2n+1}{2}\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{2}\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{\pi}{2}\cdot1\cdot\log e=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$



3

数学Ⅲ【複素数と図形】**標 準**

▶解答◀　（**1**） $f(x)$ を実数係数の n 次多項式として

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

とおく．$f(\alpha)=0$ であるとき

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$$
$$\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0}=\overline{0}$$
$$a_n(\overline{\alpha})^n+a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0=0$$

よって $f(\overline{\alpha})=0$ となり，$\overline{\alpha}$ も $f(x)=0$ の解である．

（**2**） $z=\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+i\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}$ とおくと，z^k ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$) は図のように正 $2n+1$ 角形の頂点となる．$\mathrm{A}_k(z^k)$ とする．

$$(z^k)^{2n+1}=\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\right)^{2n+1}$$
$$=\cos2k\pi+i\sin2k\pi=1$$

であるから，x についての方程式 $x^{2n+1}-1=0$ の解は $x=z^k$ である．よって

$$x^{2n+1}-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^{2n})$$

左辺を因数分解して

$$(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1)$$
$$=(x-1)(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^{2n})$$

これは x についての同じ多項式であるから，両辺の $x-1$ を除いた部分も同じ多項式で

$$x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1$$
$$=(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^{2n})$$

$x=1$ として

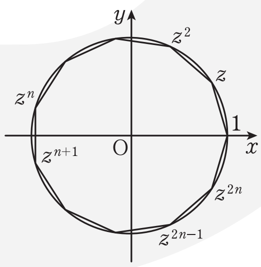
$$(1-z)\cdots(1-z^n)(1-z^{n+1})\cdots(1-z^{2n})=2n+1$$
$$|1-z|\cdots|1-z^n|\,|1-z^{n+1}|\cdots|1-z^{2n}|=2n+1$$

となる．実軸に関する対称性から

$$|1-z^n|=|1-z^{n+1}|,\ \cdots,\ |1-z|=|1-z^{2n}|$$

であるから $L^2=2n+1$

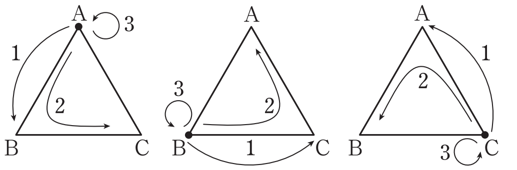
$$L=\boldsymbol{\sqrt{2n+1}}$$



◆別解◆　（**1**） $\alpha=p+qi$ ($p,\ q$ は実数，$q\neq0$) とおく．$x=p+qi$ は $x^2-2px+p^2+q^2=0$ の解である．$f(x)$ を $x^2-2px+p^2+q^2$ で割り，商を $g(x)$，余りを $Ax+B$ とおく．$g(x)$, $Ax+B$ はすべて実数係数である．$f(x)=(x^2-2px+p^2+q^2)g(x)+Ax+B$ に $x=\alpha$ を代入すると $0=A\alpha+B$ となる．$A\neq0$ であるとすると $\alpha=-\dfrac{B}{A}$ となり，左辺は虚数，右辺は実数で矛盾する．よって $A=0$ であり，さらに $B=0$ となる．$f(x)=(x^2-2px+p^2+q^2)g(x)$ となり，$x=p-qi$ を代入すると $f(p-qi)=0$ となる．$\overline{\alpha}=p-qi$ も解である．

4 数学B【確率と漸化式】標準

▶解答◀　(1)　黒丸はそこに P があることを意味する．



P がどこにあっても次の試行で A, B, C に移動する確率はすべて $\frac{1}{3}$ である．よって文字○を書く確率は $\frac{1}{3}$，×を書く確率は $\frac{2}{3}$ である．

p_2 について．○×，×○，○○のときで

$$p_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{9}}$$

p_3 について．3 回で×が連続しない (確率 p_3) のは，1 回目が○で，あと 2 回で×が連続しない (確率 p_2) か，1 回目が×，2 回目が○ (確率 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$) になるときで

$$p_3 = \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{27}}$$

p_4 について．4 回で×が連続しない (確率 p_4) のは，1 回目が○で，あと 3 回で×が連続しない (確率 p_3) か，1 回目が×，2 回目が○ (確率 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$) であと 2 回で×が連続しない (確率 p_2) ときで

$$p_4 = \frac{1}{3}p_3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}p_2$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{11}{27} + \frac{2}{9}\cdot\frac{5}{9} = \frac{21}{81} = \boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

(2)　$n+2$ 回で×が連続しない (確率 p_{n+2}) のは，1 回目が○ (確率 $\frac{1}{3}$) で，あと $n+1$ 回で×が連続しない (確率 p_{n+1}) か，1 回目が×，2 回目が○ (確率 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$) で，あと n 回で×が連続しない (確率 p_n) ときで

$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}p_n$$

$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$ の解は $x = -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$ であるから

$$p_{n+2} + \frac{1}{3}p_{n+1} = \frac{2}{3}\left(p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n\right)$$
$$p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} = -\frac{1}{3}\left(p_{n+1} - \frac{2}{3}p_n\right)$$

数列 $\left\{p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n\right\}$，$\left\{p_{n+1} - \frac{2}{3}p_n\right\}$ は等比数列で

$$p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(p_3 + \frac{1}{3}p_2\right)$$
$$p_{n+1} - \frac{2}{3}p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(p_3 - \frac{2}{3}p_2\right)$$

辺ごとにひいて

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{11}{27} + \frac{5}{27}\right)$$
$$-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{11}{27} - \frac{10}{27}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

5 数学A【整数問題の雑題】標準

考え方　何をやればよいのか，一読して，わからない．9 進表示するから，素因数 3 の個数に注意して書く．N は 3 の倍数でない整数である．

$1! = 1,\ 2! = 2$ であり $f(1) = 0,\ f(2) = 0$

$3! = 1\cdot 2\cdot 3$ は 3 の倍数だが 9 の倍数でないから

$f(3) = 0$

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ であり $f(4) = 0$

$f(5) = 0$

$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 3^2 N$ の形で，$6! = \cdots 0_{(9)}$ だから

$f(6) = 1$

$7!$ も $8!$ も $3^2 N$ の形で $f(7) = 1,\ f(8) = 1$

$9! = 3^4 N$ の形で $9! = \cdots 00_{(9)}$ だから $f(9) = 2$

$12! = 3^5 N$ の形で $12! = 3N\cdot 3^4$ だから $f(12) = 2$

3 の個数を半分 (小数部分は切り捨てる) にする．

注意【素因数の個数を数える関数】

$[x]$ はガウス記号で，整数部分を表す．

自然数 n と素数 p に対して，$n!$ に含まれる p の個数を $f(n,\ p)$ で表す．

$$f(n,\ p) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

となる．$f(n,\ p)$ には日本では名前がついていないが，「組合せ論の精選 102 問」(朝倉書店，清水俊宏訳) には「ルジャンドル関数」という名前がある．この式の証明には 2 通りあるが，直接的であるのは次の方法である．図は $n = 24,\ p = 2$ の場合であるが，これは視覚化した例でしかない．p の倍数 (図では偶数) を並べ，各整数が p を幾つ持っているかを，縦に，黒丸の個数で表す．最終的には黒丸の総数を求める．1 列目を横に数えていく．ここには p の倍数分だけの黒丸が並ぶから $\left[\frac{n}{p}\right]$ 個の黒丸がある．2 列目を横に数えていく．ここに黒丸があるものは，p^2 の倍数のものだから $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ 個の黒丸がある．以下同様である．

	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1 列目	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
2 列目		●		●		●		●		●		●
3 列目				●				●				●
4 列目								●				

なお，自然数 $n,\ k$ に対して 1 以上 n 以下の自然数で k の倍数が $\left[\frac{n}{k}\right]$ 個あることを公式として用いた．

なお，$\left[\frac{n}{p^2}\right]$ は $\left[\frac{n}{p}\right]$ の結果を p で割る．つまり

$\dfrac{n}{p^2}$ を計算するのではなく，$\left[\dfrac{1}{p}\left[\dfrac{n}{p}\right]\right]$ を計算する．これを続ける．

▶解答◀ $[x]$ はガウス記号とする．自然数 n に対して，$n!$ に含まれる素因数 p の個数 M は

$$M=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

である．以下は $p=3$ とする．

$$f(n)=\left[\frac{M}{2}\right]$$

である．

(**1**) $n=8$ のとき

$$M=\left[\frac{8}{3}\right]=2$$

よって $f(8)=\left[\dfrac{2}{2}\right]=\mathbf{1}$

$n=6789$ のとき

$$M=\left[\frac{6789}{3}\right]+\left[\frac{6789}{3^2}\right]+\left[\frac{6789}{3^3}\right]+\cdots$$
$$=2263+754+251+83+27+9+3+1$$
$$=3391$$

よって $f(6789)=\left[\dfrac{3391}{2}\right]=\mathbf{1695}$

(**2**) $[x]\leqq x$ であるから

$$f(n)=\left[\frac{M}{2}\right]\leqq\frac{M}{2}$$

ここで，$3^l\leqq n$ を満たす最大の整数 l を m とする．

$$M=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{3^2}\right]+\left[\frac{n}{3^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{3^m}\right]$$
$$\leqq\frac{n}{3}+\frac{n}{3^2}+\frac{n}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^m}$$
$$=\frac{n}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^m}{1-\frac{1}{3}}=\frac{n}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^m\right\}<\frac{n}{2}$$

よって $f(n)\leqq\dfrac{M}{2}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{n}{4}$

したがって，$4k<n$ が成り立つ．

(**3**) $f(n)=1000$ のとき

$$\left[\frac{M}{2}\right]=1000 \qquad \therefore\quad M=2000,\ 2001$$

(2)の結果から $4000<n$ である．

$n=4001$ のとき

$$M=\left[\frac{4001}{3}\right]+\left[\frac{4001}{3^2}\right]+\left[\frac{4001}{3^3}\right]+\cdots$$
$$=1333+444+148+49+16+5+1=1996$$

$n=4002$ のとき

$$M=\left[\frac{4002}{3}\right]+\left[\frac{4002}{3^2}\right]+\left[\frac{4002}{3^3}\right]+\cdots$$
$$=1334+444+148+49+16+5+1=1997$$

$n=4003$ のとき

$$M=\left[\frac{4003}{3}\right]+\left[\frac{4003}{3^2}\right]+\left[\frac{4003}{3^3}\right]+\cdots$$
$$=1334+444+148+49+16+5+1=1997$$

$n=4004$ のときも $M=1997$

$n=4005$ のときは $M=1999$

$n=4006$ のときは $M=1999$

$n=4007$ のときは $M=1999$

$n=4008$ のときは

$$M=1336+445+148+49+16+5+1=2000$$

最小の $n=\mathbf{4008}$

要の分析 入試の頻出問題をふまえるのは当然として，その上で，さらにひとひねり加えた問題もある．なかなか高度である．

（中谷，KK，河野，鈴木伊，前田拓，安田亨）