国際医療福祉大学・医学部

試験日　2023 年 1 月 18 日　時間 80 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1） xy 平面において，放物線 $y = x^2 - 4x + 7$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線 C の方程式は，$y = x^2 + \square x + \square$ である．

また，放物線 C' を x 軸方向に 4，y 軸方向に -6 だけ平行移動し，さらに原点に関して対称移動して得られる放物線は C と一致する．このとき，C' の方程式は $y = \square x^2 - \square x - \square$ である．

（2） 5 進法で表された数 $0.312_{(5)}$ を 10 進法で表すと，$0.\square$ である．

また，10 進法で表された数 0.312 を 5 進法で表すと，$0.\square_{(5)}$ である．

（3） $0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，$f(\theta) = \sqrt{3}\sin\theta + a\cos\theta + \sqrt{3}$ とする．ただし，a は定数とする．

（i） $a = 1$ のとき，$f(\theta) \leqq 0$ の解は，$\dfrac{\square}{\square}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\square}{\square}\pi$ である．

（ii） $a = 3$ のとき，$f(\theta) \leqq 0$ の解は，$\dfrac{\square}{\square}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\square}{\square}\pi$ である．

（4） 座標空間に 3 点 A(5, 5, 5)，B(4, 6, 3)，C(0, 1, 4) がある．

（i） $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \square$ である．

（ii） 四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D をとる．

D の座標は，$(\square, \square, \square)$ であり，平行四辺形 ABCD の面積は $\square\sqrt{\square}$ である．

2 3 つの袋 A，B，C がある．袋 A には赤球 1 個，白球 2 個，青球 2 個，袋 B には赤球 2 個，白球 1 個，青球 2 個，袋 C には赤球 2 個，白球 2 個，青球 1 個が入っている．

（1） それぞれの袋から同時に 1 個の球を取り出す．袋 A から取り出した球は袋 B に入れ，袋 B から取り出した球は袋 A に入れる．また，袋 C から取り出した球は白球ならば袋 A に入れ，白球以外ならば袋 C に戻す．この操作の後，次の確率をそれぞれ求めよ．

（i） 袋 A の中に赤球が入っていない確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（ii） 袋 A の中に赤球がちょうど 1 個入っている確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（iii） 袋 A の中に白球がちょうど 3 個入っている確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（iv） 袋 A の中に白球がちょうど 3 個入っていたとき，その中に袋 C から取り出した白球が含まれている条件付き確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） それぞれの袋から同時に 2 個の球を取り出す．袋 A から取り出した球はすべて袋 B に入れ，袋 B から取り出した球はすべて袋 A に入れる．また，袋 C から取り出した球は，それらが同じ色ならばすべて袋 A に入れ，異なる色ならばすべて袋 C に戻す．この操作の後，次の確率をそれぞれ求めよ．

（i） 袋 A の中に赤球が 5 個入っている確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（ii） 袋 A の中に赤球が入っていない確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

3 i を虚数単位とする．z を 1 でない複素数とし，$w = \dfrac{2z - 4}{z - 1}$ とおく．また，複素数の偏角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えるものとする．

（1） z が $|z| = 1$ を満たしながら変化するとき，複素数平面上において，点 w は点 $\boxed{ア}$ と点 $\boxed{イ}$ を結ぶ線分

の垂直二等分線を描く．ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ は実数であり，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする．

（２） 複素数平面上において，点 z が虚軸上を動くとする．

（ｉ） 複素数平面上において，点 w は，点 $\square$ を中心とする半径 $\square$ の円を描く．ただし，点 $\square$ を除く．

（ii） $\alpha = \arg w$ とすると，$\tan\alpha$ のとり得る値の範囲は，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \leqq \tan\alpha \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

（３） 複素数平面上において，点 z が点 $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{5}$ の円上を動くとする．

（ｉ） $|z|$ のとり得る値の範囲は $\dfrac{\square}{\square} \leqq |z| \leqq \dfrac{\square}{\square}$ である．

（ii） $\arg z$ が最大，最小となる点をそれぞれ z_1, z_2 とする．

$\beta = \arg\dfrac{z_1}{z_2}$ とすると，$\tan\beta = \dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

（iii） 複素数平面上において，点 w は，点 $\dfrac{\square}{\square}+\dfrac{\square}{\square}i$ を中心とする半径 $\dfrac{\square}{\square}$ の円を描く．

4 Oを原点とする xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて，$\begin{cases} x = e^{|t|}+et, \\ y = e^{|t|}-et \end{cases}$ と定める．

（１） $\dfrac{dx}{dt}=0$ のとき，$x=\square$, $y=\square e$ である．

$\dfrac{dy}{dt}=0$ のとき，$x=\square e$, $y=\square$ である．

（２） 次の定積分をそれぞれ求めると，

$$\int_0^1 te^t\,dt = \square,\quad \int_0^1 t^2e^t\,dt = e-\square,\quad \int_0^1 te^{2t}\,dt = \frac{\square}{\square}e^{\square}+\frac{\square}{\square}$$

である．

（３） C と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D とする．

（ｉ） D の面積は，$\square e^{\square}-\square e$ である．

（ii） D を x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積は，$\left(\dfrac{\square}{\square}e^{\square}-\square e\right)\pi$ である．

（iii） $t \neq 0$ のとき，C 上の点 $\mathrm{P}\left(e^{|t|}+et,\ e^{|t|}-et\right)$ から直線 $l : y=x$ に下ろした垂線と l との交点をHとすると，$\mathrm{PH} = \sqrt{\square}\,e|t|$，$\mathrm{OH} = \sqrt{\square}\,e^{|t|}$ である．よって，D を直線 l のまわりに１回転してできる立体の体積は，$\square\sqrt{\square}\left(e^{\square}-\dfrac{e^{\square}}{\square}\right)\pi$ である．

1 （１） 数学Ⅰ【２次関数】標準

▶解答◀　$y = x^2-4x+7$

$y=(x-2)^2+3$

の頂点は $(2,\,3)$ で，これを x 軸方向に -3，y 軸方向に２だけ平行移動すると頂点は $(-1,\,5)$ に移る．

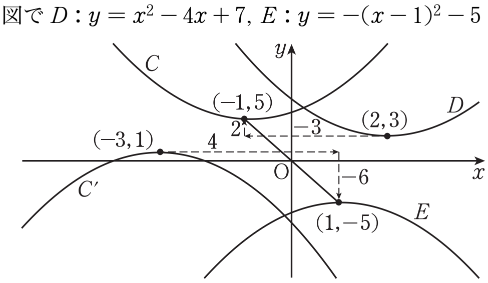
$C : y=(x+1)^2+5$

C : $\boldsymbol{y=x^2+2x+6}$

移動を逆にたどると，C を原点に関して対称移動し，x 軸方向に -4，y 軸方向に６だけ平行移動したら C' になる．頂点は $(-1,\,5) \to (1,\,-5) \to (-3,\,1)$ と変わる．

$C' : y=-(x+3)^2+1$ は $\boldsymbol{y=-x^2-6x-8}$ である．

図で $D : y=x^2-4x+7$, $E : y=-(x-1)^2-5$



（２） 数学A【p 進法】基本

▶解答◀　$0<x<1$ の実数 x を 5 進法で表すとは

$$x=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\cdots$$

の形で表すことである．ただし a_k は整数で $0 \leqq a_k \leqq 4$ である．

$$0.312_{(5)}=\frac{3}{5}+\frac{1}{25}+\frac{2}{125}$$
$$=0.6+0.04+0.016=\mathbf{0.656}$$
$$0.312=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\cdots$$

として 5 倍すると

$$1.56=a_1+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\frac{a_4}{5^3}+\cdots$$

両辺の整数部分を比べて $a_1=1$ である．両辺から 1 を引いて

$$0.56=\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\frac{a_4}{5^3}+\cdots$$

5 倍して

$$2.8=a_2+\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\cdots$$

両辺の整数部分を比べて $a_2=2$ である．両辺から 2 を引いて

$$0.8=\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\cdots$$

5 倍して

$$4=a_3+\frac{a_4}{5}+\cdots$$

$a_3=4$ で以後は 0 である．答えは $0.312_{(10)}=\mathbf{0.124_{(5)}}$

（３）　数学Ⅱ【三角関数の不等式】標準

▶解答◀　$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とおく．

$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ は円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点である．$f(\theta) \leqq 0$ のとき $\sqrt{3}\,y+ax+\sqrt{3} \leqq 0$ となる．直線 $l: \sqrt{3}\,y+ax+\sqrt{3}=0$ を考える．これは $x=0,\ y=-1$ で成り立つ．つまり $\theta=\frac{3\pi}{2}$ の点で円 C と交わる．解が求められるから他の交点も有名角で与えられる．P が l 上または l より下方にある θ の範囲を求める．

（ｉ）　$a=1$ のとき $l: \sqrt{3}\,y+x+\sqrt{3}=0$ は

$\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ を通る．図 1 より $\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi}$

（ii）　$a=3$ のとき $l: \sqrt{3}\,y+3x+\sqrt{3}=0$ は

$\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通る．図 2 より $\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi}$

図 1

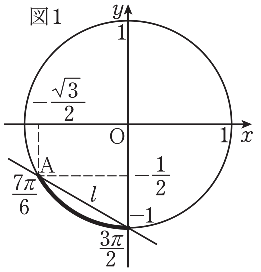
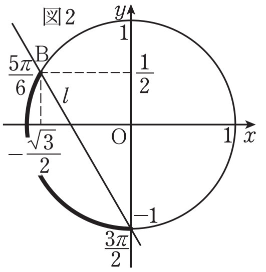


図 2



◆別解◆　（ｉ）　$a=1$ のとき

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta+\sqrt{3}$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$$
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \leqq -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{6} \leqq \theta+\frac{\pi}{6} < 2\pi+\frac{\pi}{6}$$
$$\frac{4\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{5\pi}{3} \qquad \therefore\ \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi}$$

（ii）　$a=3$ のとき

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta+\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$$
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \leqq -\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} < 2\pi+\frac{\pi}{3}$$
$$\frac{7\pi}{6} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{11}{6}\pi$$
$$\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi}$$

図 3

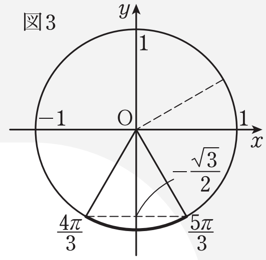
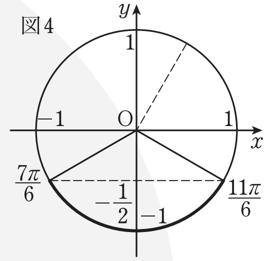


図 4



（４）　数学B【ベクトルと図形（空間）】標準

▶解答◀　（ｉ）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1, 1, -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-5, -4, -1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=5-4+2=\mathbf{3}$$

（ii）　AC の中点と BD の中点が一致するから

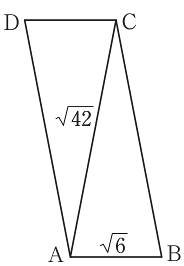
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(5, 5, 5)+(0, 1, 4)-(4, 6, 3)=(1, 0, 6)$$

D の座標は $\mathbf{(1, 0, 6)}$ である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1+1+4=6$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=25+16+1=42$$

平行四辺形 ABCD の面積は △ABC の面積の 2 倍であるから

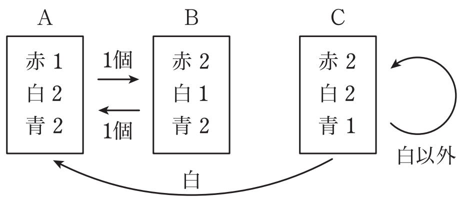
$$2\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$
$$=\sqrt{6\cdot 42-9}=\mathbf{9\sqrt{3}}$$



2 数学A【確率の雑題】標準

▶解答◀　(1)(i)　Aに赤球が入っていないのは，Aから赤球を取り出しBから赤球以外を取り出すときであるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{3}{25}}$$



(ii)　Aに赤球が1個入っているのは，Aから赤球を取り出しBから赤球を取り出す，または，Aから赤球以外を取り出しBから赤球以外を取り出す，のいずれかのときであるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{14}{25}}$$

(iii)　Aに白球が3個入っているのは，Aから白球を取り出しBとCから白球を取り出す，または，Aから白球以外を取り出しBまたはCのいずれか一方のみから白球を取り出す，のいずれかのときである．求める確率は

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)$$
$$=\frac{4+33}{125}=\mathbf{\frac{37}{125}}$$

(iv)　Aに白球が3個入っている事象をW, AにCから取り出した白球が含まれている事象をCとすると(iii)より$P(W)=\frac{37}{125}$である．

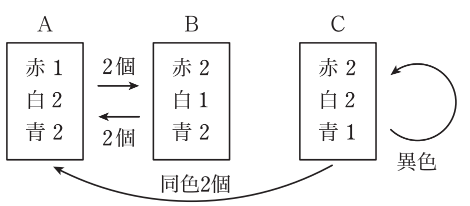
$$P(W\cap C)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{28}{125}$$

であるから求める条件付き確率は

$$P_W(C)=\frac{P(W\cap C)}{P(W)}=\frac{\frac{28}{125}}{\frac{37}{125}}=\mathbf{\frac{28}{37}}$$

(2)(i)　Aに赤球が5個入っているのは，Aから赤球以外を2個，Bから赤球を2個，Cから赤球を2個取り出すときであるから，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\cdot\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}\cdot\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{1000}=\mathbf{\frac{3}{500}}$$



(ii)　Aに赤球が入っていないのは，Aから赤球を1個と赤球以外を1個，Bから赤球以外を2個，Cから赤球を1個以下取り出すときである．Cから取り出す球については余事象を考えて，求める確率は

$$\frac{1\cdot4}{{}_5\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\cdot\left(1-\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}\right)=\frac{4\cdot3\cdot9}{1000}=\mathbf{\frac{27}{250}}$$

◆別解◆　(1)(iv)　A，B，Cから取り出す玉をa, b, cとする．(a, b, c)は全部で5^3通りあるが，このうちA内の白球が3個になるのは次の場合がある．

Aから白を取り，B，Cから白を取るとき．2・1・2通りある．

Aから白以外を取り，Bから白を取り，Cから白以外を取るとき．3・1・3通りある．

Aから白以外を取り，Bから白以外を取り，Cから白を取るとき．3・4・2通りある．

求める確率は$\frac{4+24}{4+9+24}=\mathbf{\frac{28}{37}}$

3 数学Ⅲ【複素数と図形】標準

▶解答◀　(1)　$w=\frac{2z-4}{z-1}$

$$w(z-1)=2z-4$$

$$z(w-2)=w-4$$

$w=2$では成立しないから$w\neq2$

$$z=\frac{w-4}{w-2}$$

$|z|=1$のとき

$$\left|\frac{w-4}{w-2}\right|=1$$

$$|w-4|=|w-2|$$

点wは点**2**と点**4**を結ぶ線分の垂直二等分線を描く．

(2)(i)　zは純虚数だから$z+\overline{z}=0$を満たす．

$$\frac{w-4}{w-2}+\frac{\overline{w}-4}{\overline{w}-2}=0$$

$$(w-4)(\overline{w}-2)+(\overline{w}-4)(w-2)=0$$

$$2w\overline{w}-6w-6\overline{w}+16=0$$

$$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+8=0$$

$$(w-3)(\overline{w}-3)=1$$

$$|w-3|=1$$

点wは点**3**を中心とする半径**1**の円を描く．ただし，点**2**を除く．

(ii)　図1を見よ．wが点Tにあるとき$\tan\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$であるから

$$\mathbf{\frac{-\sqrt{2}}{4}\leqq\tan\alpha\leqq\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

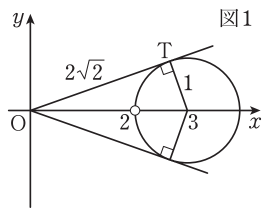


図1

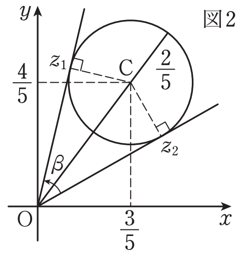


図2

（**3**）（**i**）$\left|z-\dfrac{3+4i}{5}\right|=\dfrac{2}{5}$ ……………………①

図2を見よ．$\left|\dfrac{3+4i}{5}\right|=1$ であるから

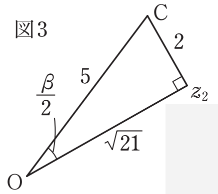
$$\boldsymbol{\frac{3}{5}\leqq|z|\leqq\frac{7}{5}}$$

（**ii**） 図3は図2の原点O，中心C，接点 z_2 を結ぶ三角形を取り出した図で，値は辺の比を表す．

$\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$ であるから，

$$\tan\beta=\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{21}}}{1-\frac{4}{21}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{21}}{17}}$$

図3



（**iii**） $z=\dfrac{w-4}{w-2}$ を①に代入して

$$\left|\frac{w-4}{w-2}-\frac{3+4i}{5}\right|=\frac{2}{5}$$
$$|5(w-4)-(3+4i)(w-2)|=2|w-2|$$
$$|(2-4i)w-14+8i|=2|w-2|$$
$$|(1-2i)w-7+4i|=|w-2|$$
$$|1-2i|\left|w-\frac{7-4i}{1-2i}\right|=|w-2|$$
$$\sqrt{5}|w-(3+2i)|=|w-2|$$
$$5(w-(3+2i))(\overline{w}-(3-2i))=(w-2)(\overline{w}-2)$$
$$4w\overline{w}-(13-10i)w-(13+10i)\overline{w}+61=0$$
$$\left(2w-\frac{13+10i}{2}\right)\left(2\overline{w}-\frac{13-10i}{2}\right)=\frac{269}{4}-61$$
$$\left|2w-\frac{13+10i}{2}\right|^2=\frac{25}{4}$$
$$\left|w-\frac{13+10i}{4}\right|=\frac{5}{4}$$

点 w は点 $\boldsymbol{\dfrac{13}{4}+\dfrac{5}{2}i}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$ の円を描く．

4

数学Ⅲ【体積】**やや難**

▶解答◀ （**1**） $t\geqq0$ のとき

$$x=e^t+et,\ y=e^t-et$$

$t\leqq0$ のとき

$$x=e^{-t}+et,\ y=e^{-t}-et$$

$t>0$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=e^t+e>0,\ \frac{dy}{dt}=e^t-e \quad\text{……………①}$$

$t<0$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}+e,\ \frac{dy}{dt}=-e^{-t}-e<0 \quad\text{……②}$$

$\dfrac{dx}{dt}=0$ のとき，②より $t=-1$ であるから $\boldsymbol{x=0}$，$\boldsymbol{y=2e}$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ のとき，①より $t=1$ であるから $\boldsymbol{x=2e}$，$\boldsymbol{y=0}$

（**2**） $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt=\int_0^1 t(e^t)'\,dt$

$$=\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1(t)'e^t\,dt$$
$$=e-\int_0^1 e^t\,dt=e-\Big[e^t\Big]_0^1=\boldsymbol{1}$$
$$\int_0^1 t^2e^t\,dt=\int_0^1 t^2(e^t)'\,dt$$
$$=\Big[t^2e^t\Big]_0^1-\int_0^1(t^2)'e^t\,dt$$
$$=e-2\int_0^1 te^t\,dt=\boldsymbol{e-2}$$
$$\int_0^1 te^{2t}\,dt=\int_0^1 t\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[te^{2t}\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(t)'e^{2t}\,dt$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}\,dt$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\Big[e^{2t}\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}}$$

（**3**）（**i**） 時刻 t のとき $\mathrm{P}\left(e^{|t|}+et,\,e^{|t|}-et\right)$，時刻 $-t$ のとき $\mathrm{P}\left(e^{|t|}-et,\,e^{|t|}+et\right)$ であるから，この2点は直線 $y=x$ に関して対称な位置にある．したがって，曲線 C は $l:y=x$ に関して対称である．C の概形は図1のようになる．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$	$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$
$\dfrac{dy}{dt}$	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	↙		↘		↘		↗

D を図1のように3つの部分（正方形と2つの合同な図形）に分割すると，求める面積は

$$2\int_1^{2e}y\,dx+1=2\int_0^1 y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt+1$$

$$= 2\int_0^1 (e^t - et)(e^t + e)\,dt + 1$$

$$= 2\int_0^1 (e^{2t} - e\cdot te^t + e\cdot e^t - e^2 t)\,dt + 1$$

$$= \Big[\, e^{2t} \,\Big]_0^1 - 2e\cdot 1 + 2e\Big[\, e^t \,\Big]_0^1 - e^2\Big[\, t^2 \,\Big]_0^1 + 1$$

$$= e^2 - 1 - 2e + 2e(e-1) - e^2 + 1$$

$$= \boldsymbol{2e^2 - 4e}$$

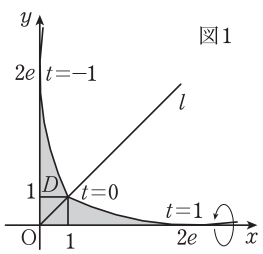


図1

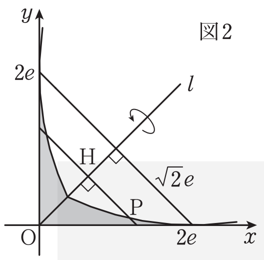


図2

（**ii**）　求める体積を V_1 とおく．

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^{2e} y^2\,dx$$

$$= \int_0^1 y^2\,dx + \int_1^{2e} y^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^0 (e^{-t} - et)^2(-e^{-t} + e)\,dt$$

$$+ \int_0^1 (e^t - et)^2(e^t + e)\,dt$$

$t = -s$ とおくと，$dt = -ds$ で，$t : -1 \to 0$ のとき $s : 1 \to 0$ であるから

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_1^0 (e^s + es)^2(-e^s + e)\,(-ds)$$

$$+ \int_0^1 (e^t - et)^2(e^t + e)\,dt$$

s を t に書き換えて

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 e^t((e^t - et)^2 - (e^t + et)^2)\,dt$$

$$+ e\int_0^1 ((e^t + et)^2 + (e^t - et)^2)\,dt$$

$$= -4e\int_0^1 te^{2t}\,dt + 2e\int_0^1 (e^{2t} + e^2t^2)\,dt$$

$$= -4e\cdot\frac{1}{4}(e^2+1) + e\Big[\, e^{2t} + \frac{2e^2}{3}t^3 \,\Big]_0^1$$

$$= -e(e^2+1) + e\Big(e^2 - 1 + \frac{2}{3}e^2\Big)$$

$$= \frac{2}{3}e^3 - 2e$$

$$V_1 = \Big(\,\boldsymbol{\frac{2}{3}e^3 - 2e}\Big)\boldsymbol{\pi}$$

（**iii**）　図2を見よ．$\mathrm{P}\big(e^{|t|} + et,\ e^{|t|} - et\big)$ と $l : y = x$ との距離は

$$\mathrm{PH} = \frac{\big|\, e^{|t|} + et - \big(e^{|t|} - et\big) \big|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2e|t|}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}e|t|}$$

直線 PH は傾きが -1 で，P を通るから

$$\mathrm{PH} : x + y = 2e^{|t|}$$

原点から直線 PH までの距離は

$$\mathrm{OH} = \frac{\big|\,2e^{|t|}\,\big|}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}e^{|t|}}$$

$t = 0$ のとき $\mathrm{OH} = \sqrt{2}$，$t = 1$ のとき $\mathrm{OH} = \sqrt{2}e$，$\mathrm{PH} = \sqrt{2}e$

求める体積を V_2 とおく．底面の半径 $\sqrt{2}e$ で高さ $\sqrt{2}e$ の円錐の体積から曲線 C の $0 \leqq t \leqq 1$ の部分と直線 $y = x$ の間の部分の回転体の体積を引くと考えて

$$V_2 = \pi(\sqrt{2}e)^2\cdot\sqrt{2}e\cdot\frac{1}{3} - \pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}e} \mathrm{PH}^2\,d\mathrm{OH}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}e^3\pi - \pi\int_0^1 \mathrm{PH}^2\cdot\frac{d\mathrm{OH}}{dt}\,dt$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}e^3\pi - \pi\int_0^1 2e^2t^2\cdot\sqrt{2}e^t\,dt$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}e^3\pi - 2\sqrt{2}e^2\pi\int_0^1 t^2e^t\,dt$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}e^3\pi - 2\sqrt{2}e^2\pi(e-2)$$

$$= \boldsymbol{4\sqrt{2}\Big(e^2 - \frac{e^3}{3}\Big)\pi}$$

◆別解◆　（**3**）（**i**）　点 $(x,\,y)$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $(X,\,Y)$ とおく．

$$X + Yi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(x+yi)$$

から $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$，$Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ を得る．

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2et,\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2e^{|t|}$$

$\mathrm{P}(t) = (\sqrt{2}et,\ \sqrt{2}e^{|t|})$ とおくと，
$\mathrm{P}(-t) = (-\sqrt{2}et,\ \sqrt{2}e^{|t|})$ は $\mathrm{P}(t)$ と Y 軸に関して対称である（図3）．

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき $X = \sqrt{2}et,\ Y = \sqrt{2}e^t$

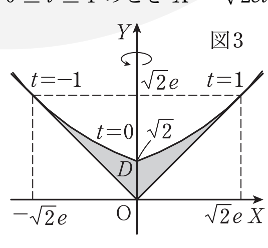


図3

D の面積を S とする．

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\sqrt{2}e} Y\,dX - \frac{1}{2}(\sqrt{2}e)^2$$

$$= \int_0^1 Y\frac{dX}{dt}\,dt - e^2$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}e^t\cdot\sqrt{2}e\,dt - e^2$$

$$= \left[\, 2e\cdot e^{t} \,\right]_0^1 - e^2 = e^2 - 2e$$

$$S = \boldsymbol{2e^2 - 4e}$$

(iii)　求める体積を V_2 とする．円錐の体積から曲線と Y 軸で囲まれる部分の回転体の体積を引いて

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{2}e)^2\cdot\sqrt{2}e - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}e}\pi X^2\,dY$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi e^3 - \int_0^1 \pi X^2\cdot\frac{dY}{dt}\,dt$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi e^3 - \int_0^1 \pi\cdot 2e^2t^2\cdot\sqrt{2}e^t\,dt$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi e^3 - 2\sqrt{2}e^2\pi(e-2)$$

$$= \boldsymbol{4\sqrt{2}e^2\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}e^3\pi}$$

注 意　**【瞬間部分積分】**

$$\int f\,g\,dx = f\,g_1 - f'\,g_2 + f''\,g_3 - f'''\,g_4 + \cdots$$

積分　積分　積分　積分

そのまま　微分　微分　微分

瞬間部分積分を用いると積分定数は省略して

$$\int te^t\,dt = (t-1)e^t$$

$$\int t^2e^t\,dt = (t^2-2t+2)e^t$$

$$\int te^{2t}\,dt = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{2t}$$

要の分析　小問集合の **1** は易しいが，**2** 以降の大問は後になるほど計算量が増えて難しくなる．

（茅嶋，松岡，安田亨）