北里大学・医学部

試験日　2023 年 1 月 27 日　時間 80 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1 （1） 8 の 6 乗根のうち，実部が正で虚部が負である複素数を z とする．このとき，$z=\boxed{}$ であり，$z+z^5=\boxed{}$ である．複素数平面において，点 z を中心とする円 C が実軸と 2 点 α,β で交わり，$|\alpha-\beta|=\sqrt{30}$ を満たしている．このとき，円 C の半径 r は $r=\boxed{}$ である．また，円 C の内部にある複素数のうち，実部，虚部ともに 0 以上の整数であるものの個数は $\boxed{}$ である．

（2） 点 (x,y) は不等式 $x^2+(y-1)^2\leqq 1$ の表す領域を動くとする．このとき，$\dfrac{x-y-1}{x+y-3}$ の最大値は $\boxed{}$ であり，$x(y-1)$ の最大値は $\boxed{}$ である．また，$\dfrac{x^2-6x+9}{y^2-2y-3}$ の最大値は $\boxed{}$ である．

（3） $\alpha=3+\sqrt{10},\ \beta=3-\sqrt{10}$ とし，正の整数 n に対して $A_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく．このとき，A_2,A_3 の値はそれぞれ $A_2=\boxed{}$，$A_3=\boxed{}$ であり，A_{n+2} を A_{n+1} と A_n を用いて表すと $A_{n+2}=\boxed{}$ である．また，α^{111} の整数部分を K とするとき，K を 10 で割ると $\boxed{}$ 余る．

（4） 正の整数 N に対して，N の正の約数の個数を $f(N)$ とする．例えば，12 の正の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 の 6 個であるから，$f(12)=6$ である．

（i） $f(5040)=\boxed{}$ である．

（ii） $f(k)=15$ を満たす正の整数 k のうち，2 番目に小さいものは $\boxed{}$ である．

（iii） 大小 2 つのサイコロを投げるとき，出る目の積を l とおく．$f(l)=4$ となる確率は $\boxed{}$ である．

（iv） 正の整数 m と n は互いに素で，等式 $f(mn)=3f(m)+5f(n)-13$ を満たすとする．このとき，mn を最小にする m と n の組 (m,n) は $\boxed{}$ である．

2 関数 $f(x)=2^x-x^2$ について考える．必要ならば，$0.6<\log 2<0.7$，$-0.4<\log(\log 2)<-0.3$ を用いてよい．

（1） $f(x)$ は区間 $x\geqq 4$ で増加することを示せ．

（2） 方程式 $f'(x)=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

（3） 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

（4） 方程式 $f(x)=0$ の実数解のうち，最小のものを p とする．このとき，曲線 $y=f(x)$ の $x\leqq 0$ の部分，放物線 $y=-x^2+\dfrac{2}{\log 2}x$，および 2 つの直線 $x=p,\ x=0$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

3 座標平面上に 3 点 $A_0(0,0)$, $B_0(2,0)$, $C_0(1,\sqrt{3})$ があり，線分 A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 をそれぞれ 2 : 1 に内分する点 A_1, B_1, C_1 をとる．以下同様にして，正の整数 n に対し，線分 A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n をそれぞれ 2 : 1 に内分する点 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} をとる．また，$\overrightarrow{p_n}=\overrightarrow{B_{n-1}B_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおく．

（1） $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ をそれぞれ成分表示せよ．

（2） $\overrightarrow{p_{n+2}}$ を $\overrightarrow{p_n}$ を用いて表せ．

（3） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{p_{2k-1}}$ を $\overrightarrow{p_1}$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{p_{2k-1}}$ は $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_5}+\cdots+\overrightarrow{p_{2n-1}}$ を表すとする．

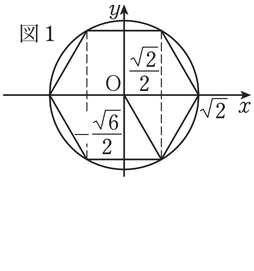
（4） 点 B_{2n} の座標を求めよ．

1

（1） 数学Ⅲ【複素数と図形】 標 準

▶解答◀

図 1



$z^6=8$ の解は O を中心，$\sqrt[6]{8}$ すなわち $\sqrt{2}$ を 1 つの頂点とする正六角形をなす（図 1 参照）．実部が正，虚部が負なのは $\sqrt{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ である．

ていねいに解くと次のようになる．

$z=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(R>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおく．

$z^6 = R^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta)$ から

$$R^6 = 8 \qquad \therefore \quad R = \sqrt{2}$$

$6\theta = 2n\pi$ より $\theta = \dfrac{n\pi}{3}$ となるから

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

ただし，$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ である．実部が正で虚部が負であるから $n = 5$ である．

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{2}}$$

$$z^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{3} + i\sin\frac{25\pi}{3}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i$$

であるから，$\boldsymbol{z + z^5 = \dfrac{5\sqrt{2} + 3\sqrt{6}i}{2}}$ である．

図2を見よ．ただし α, β の位置は逆でもよい．

$|\alpha - \beta| = \sqrt{30}$ のとき，$\left|\alpha - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$ であるから，円 C の半径 r は

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \mathbf{3}$$

したがって，円 C の内部の点 w は

$$\left| w - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{2}\right) \right| < 3 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす．

図2

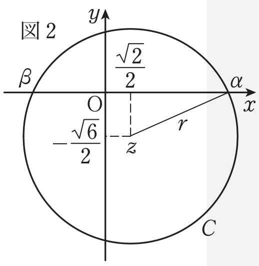
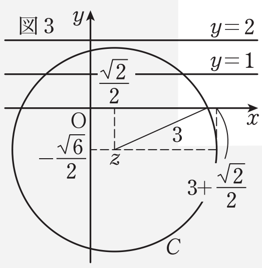


図3



円 C の内部にある実部，虚部がともに 0 以上の整数となる複素数を $x + yi$ とおく．x, y は

$$0 \leqq y < 3 - \frac{\sqrt{6}}{2},\ 0 \leqq x < 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3 - \frac{\sqrt{6}}{2} = 3 - \frac{2.4\cdots}{2} = 1.\cdots$$

$$3 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.7\cdots$$

を満たす整数であるから，y は 0 または 1 であり，x は 0, 1, 2, 3 のいずれかである（図3参照）．

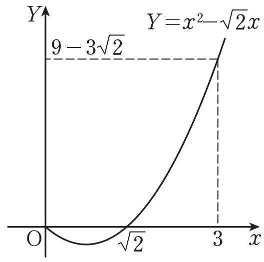
$w = x + yi$ とおく．① より

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 < 9$$

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{6}y + \frac{2+6}{4} < 9$$

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{6}y < 7$$

（ア）$y = 0$ のとき $x^2 - \sqrt{2}x < 7$



$x = 3$ のとき $9 - 3\sqrt{2} < 7 \Longleftrightarrow 2 < 3\sqrt{2}$ は成り立つから $x = 0, 1, 2$ でも成り立つ．

（イ）$y = 1$ のとき

$$x^2 - \sqrt{2}x < 6 - \sqrt{6} = 3.55\cdots$$

$x = 2$ で成り立ち $x = 3$ では成立しない．

$$x = 0, 1, 2$$

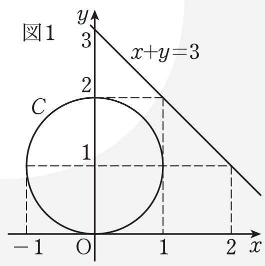
全部で $4 + 3 = \mathbf{7}$ 個ある．

（2） **数学Ⅲ**【2次曲線と直線】**標 準**

考え方　「$= k$ とおいて共有点をもつ条件を調べる」という解法は受験の世界では逆手流と呼ばれている．実際に変数を動かすか，どちらかで考える．

▶解答◀　$C : x^2 + (y-1)^2 \leqq 1$ $\cdots\cdots\cdots ①$

図1



とおく．$x + y \neq 3$ のもとで，$\dfrac{x - y - 1}{x + y - 3} = k$ とおく．

$$x - y - 1 = k(x + y - 3)$$

$$(k-1)x + (k+1)y + 1 - 3k = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

① かつ ② を満たす実数 x, y が存在する条件は C の中心 $(0, 1)$ と ② の距離が ① の半径以下になることで

$$\frac{|k + 1 + 1 - 3k|}{\sqrt{(k-1)^2 + (k+1)^2}} \leqq 1$$

$$2|1 - k| \leqq \sqrt{2(k^2+1)}$$

$$2(k^2 - 2k + 1) \leqq k^2 + 1$$

$$k^2 - 4k + 1 \leqq 0$$

$$2 - \sqrt{3} \leqq k \leqq 2 + \sqrt{3}$$

したがって，k の最大値は $\mathbf{2 + \sqrt{3}}$ である．

ただし，② は定点 $(2, 1)$ を通る直線を表し，①，② が共有点をもつとき，その共有点は $x+y \neq 3$ を満たす．図を見よ．

① 上の点 (x, y) は

$$x=r\cos\theta,\ y-1=r\sin\theta,\ 0 \leqq r \leqq 1$$

とおけて

$$x(y-1)=r^2\cos\theta\sin\theta=\frac{r^2}{2}\sin 2\theta$$

の最大値は $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ である．たとえば $r=1,\ \theta=\frac{\pi}{4}$ でおこる．

$\frac{x^2-6x+9}{y^2-2y-3}=\frac{(3-x)^2}{(y-1)^2-4}=f$ とおく．

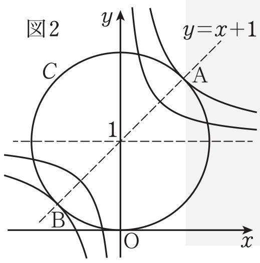
この式の分子は正，分母は負であるから $f<0$ である．負の最大は考えにくい．要するに，できるだけ 0 に近づけるとよい．

$|f|=\frac{(3-x)^2}{4-(y-1)^2}$ が 0 に近いとは，最小ということであり，$-1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq (y-1)^2 \leqq 1$ であるから，分母が最大（分母を 4 に近づける），分子が最小（できるだけ 3 に近い x を考える）のときである．

$(y-1)^2=0,\ x=1$ のときに最小値 1 をとる．f の最大値は $\boldsymbol{-1}$ である．

♦別解♦　$x(y-1)=k$ とおく．最大を考えるから $k>0$ とする．$(0, 1)$ が中心の反比例のグラフが ① と共有点をもつときで k が最大になるのは，図 2 で点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通るときである．k の最大値は $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

図2



あるいは，相加相乗平均の不等式より

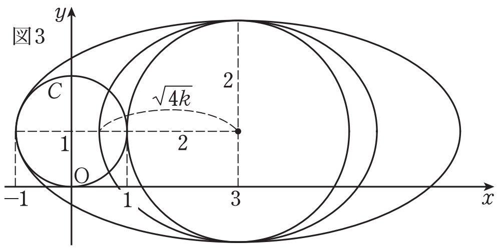
$$1 \geqq x^2+(y-1)^2 \geqq 2\sqrt{x^2(y-1)^2}=2\,|x(y-1)|$$

$-\frac{1}{2} \leqq x(y-1) \leqq \frac{1}{2}$ となり，右の等号は $x=y-1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに成り立つ．

$\frac{x^2-6x+9}{y^2-2y-3}=\frac{(3-x)^2}{(y-1)^2-4}=-k$ とおく．$k>0$ である．$\frac{(x-3)^2}{4k}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

$-k$ の最大を考えるから k の最小を考える．楕円が ① と共有点をもつときで，長半径が一番短いのは図 3 で点 $(1, 1)$ を通るときであり，$\sqrt{4k}=2$ である．k の最小値は 1 である．求める最大値は $\boldsymbol{-1}$

図3

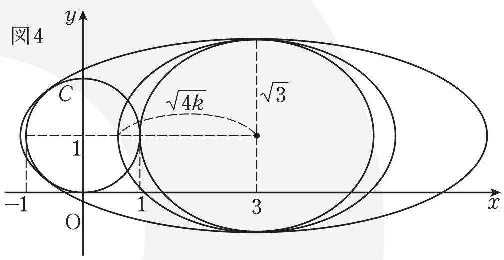


注意　**【見た目では危ない】**

最後の設問であるが，「$\frac{x^2-6x+9}{y^2-2y-2}$ の最小値を求めよ」にすると面白い．「簡単だよ．

$\frac{(3-x)^2}{(y-1)^2-3}=-k,\ k>0$ として，k の最大値をとるときだ．それは，図 3 と同様の図で，今度は $(-1, 1)$ を通るときだ」と思うあなた．甘い，それは誤答である．

図4



今度は $\frac{(x-3)^2}{3k}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$ となり，図 4 のような形であるから，$(-1, 1)$ を通るときには答えを与えない．

C 上の点を $(\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$ として，

$$k=\frac{(x-3)^2}{3-(y-1)^2}=\frac{(3-\cos\theta)^2}{3-\sin^2\theta}=\frac{(3-c)^2}{2+c^2}$$

$c=\cos\theta$ とした．c で微分すれば $c=-\frac{2}{3}$ で最大になるから，$(-1, 1)$ を通るときではないとわかる．

(3)　**数学B**【漸化式】**標準**

▶解答◀　$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=-1$ であるから

$$A_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=36+2=\boldsymbol{38}$$

$$A_3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=216+18=\boldsymbol{234}$$

$$A_{n+2}=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$$

$$=\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$$

$$=\boldsymbol{6A_{n+1}+A_n}$$

合同式の法を 10 とする．

$$A_1 \equiv 6,\ \ A_2 \equiv 8,\ \ A_3 \equiv 4,$$

$$A_4 \equiv 6A_3+A_2 \equiv 24+8 \equiv 2,$$

$$A_5 \equiv 6A_4 + A_3 \equiv 12 + 4 \equiv 6,$$

$$A_6 \equiv 6A_5 + A_4 \equiv 36 + 2 \equiv 8$$

6, 8 から始まって 6, 8 にもどった．6, 8, 4, 2 を周期 4 で繰り返す．$111 = 27 \cdot 4 + 3$ であるから $A_{111} \equiv A_3 \equiv 4$ である．指数や添字が 111 というのはうるさい．以下 $N = 111$ とする．$-1 < \beta < 0$ である．$A_N = \alpha^N + \beta^N$, $-1 < \beta^N < 0$ であるから $\alpha^N = A_N - \beta^N$ は A_N に少し加えた形で，その整数部分は A_N である．これを 10 で割ると余りは **4** である．

（4） 数学A【不定方程式】標 準

▶解答◀　$p_1, \cdots, p_k$ を異なる素数，$e_1, \cdots, e_k$ を自然数とすると $p_1{}^{e_1} \cdots p_k{}^{e_k}$ の正の約数の個数は $(1 + e_1) \cdots (1 + e_k)$ である．

（i） $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ であるから

$$f(5040) = (1 + 4)(1 + 2)(1 + 1)(1 + 1) = \mathbf{60}$$

（ii） $15 = 3 \cdot 5$ であるから k は p^{14} か $p^2 q^4$（p, q は異なる素数）の形である．

$$2^{14}, 3^{14}, 5^{14}, \cdots$$

$$2^4 \cdot 3^2, 3^4 \cdot 2^2, \cdots$$

$$2^4 \cdot 5^2, 5^4 \cdot 2^2, \cdots$$

$$\cdots$$

を考えるが，

$$2^{14} = 1024 \cdot 16,\ 2^4 \cdot 3^2 = 144,\ 2^2 \cdot 3^4 = 324$$

であり，最小の k は 144 であり，$2^4 q^2$ の場合において，$2^4 \cdot 5^2 = 400$ であるから，2 番目に小さい k の値は **324** である．

（iii） 大小のサイコロを A，B とし，A，B に出る目を順に a, b とする．(a, b) は全部で 36 通りあり，$l = ab$ として $f(l) = 4$ のとき，$ab = p^3$, $ab = pq$（p, q は 2, 3, 5 のいずれか）の場合となる．

（ア） p^3 の場合

$(a, b) = (2, 4), (4, 2)$ の 2 通り．

（イ） pq の場合

$$(a, b) = (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 5),$$

$$(6, 1), (3, 2), (5, 2), (5, 3) \text{ の 8 通り．}$$

（ア）（イ）から，$f(l) = 4$ となる確率は $\dfrac{2 + 8}{36} = \mathbf{\dfrac{5}{18}}$ である．

（iv） m と n が互いに素であるとき，$f(mn) = f(m)f(n)$ が成り立つ．したがって

$$f(mn) = 3f(m) + 5f(n) - 13$$

$$f(m)f(n) - 3f(m) - 5f(n) + 15 = 2$$

$$(f(m) - 5)(f(n) - 3) = 2$$

$f(m)$, $f(n)$ は $f(m) \geqq 1$, $f(n) \geqq 1$ を満たす整数であるから

$$(f(m) - 5, f(n) - 3) = (-2, -1), (-1, -2),$$

$$(1, 2), (2, 1)$$

$(f(m), f(n)) = (3, 2), (4, 1), (6, 5), (7, 4)$ ………①

それぞれの場合について（ここでは「m, n が互いに素」は無視せよ．答えに影響しない）

(最小の m，最小の n) $= (4, 2), (6, 1), (12, 16), (64, 6)$ である．なお，

$f(N) = 1$ を満たす最小の N は 1,

$f(N) = 2$ を満たす最小の N は 2,

$f(N) = 3$ を満たす最小の N は $2^2 = 4$,

$f(N) = 4$ を満たす最小の N は（iii）より 6,

$f(N) = 5, 6, 7$ を満たす最小の N は実質使わないから，無視せよ．一応書いておいただけである．

① の中で mn が最小になるものは，$(f(m), f(n)) = (4, 1)$ のときの，$m = 6, n = 1$ となる．mn を最小にする $(m, n) = \mathbf{(6, 1)}$ である．

注 意 **1°【f の性質】**

m, n が互いに素のとき，$p_1, \cdots, p_i, q_1, \cdots, q_j$ を異なる素因数，$d_1, \cdots, d_i, e_1, \cdots e_j$ を自然数として

$$m = p_1{}^{d_1} \cdots p_i{}^{d_i},\ n = q_1{}^{e_1} \cdots q_j{}^{e_j}$$

とおける．$mn = p_1{}^{d_1} \cdots p_i{}^{d_i} q_1{}^{e_1} \cdots q_j{}^{e_j}$ となり，mn, m, n の正の約数の個数は

$$f(mn) = (1 + d_1) \cdots (1 + d_i)(1 + e_1) \cdots (1 + e_j)$$

$$f(m) = (1 + d_1) \cdots (1 + d_i)$$

$$f(n) = (1 + e_1) \cdots (1 + e_j)$$

であり $f(mn) = f(m)f(n)$ が成り立つ．なお，「自然数 m, n が互いに素」とは，直訳すれば relatively prime の訳で 2 つの関係として，異なる素因数で構成されていること，共通な素因数をもたないことである．「最大公約数が 1」と説明されることが多いが，解法では最大公約数など考えず素因数を考えることが多いから直接的な説明とはいえない．

2°【使わない値だが】

$f(m) = 6$ のとき．$m = p^5$ または $m = pq^2$ の形である．最小の m は $2^5 = 32$ または $3 \cdot 2^2 = 12$

$f(n) = 5$ のときは $n = p^4$ で，最小の $n = 2^4 = 16$

$f(m) = 7$ のときは $m = p^6$ で，最小の $m = 2^6 = 64$

2 数学III【面積】標 準

▶解答◀　（1） $f'(x) = 2^x \log 2 - 2x$

$$f''(x) = 2^x (\log 2)^2 - 2$$

$x \geqq 4$ のとき，

$$2^x(\log 2)^2 \geqq 16 \cdot (0.6)^2 = 5.76 > 2$$

$f''(x) > 0$ であり，$x \geqq 4$ で $f(x)$ は下に凸である．

$$f'(4) = 16\log 2 - 8 = 8(2\log 2 - 1) > 0$$

図 2 の $x \geqq 4$ の部分を参照せよ．よって $x \geqq 4$ で $f(x)$ は増加する．

（**2**） 曲線 $y = 2^x \log 2$ は下に凸で，直線 $y = 2x$ とは多くても 2 交点しかもたない．

$x = 2$ で $4\log 2 < 4 \cdot 0.7 < 4$ であるから，図 1 より 2 交点をもつ．$f'(x) = 0$ の異なる実数解の個数は **2** である．その解を小さい方から α, β とする．

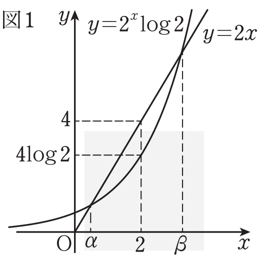
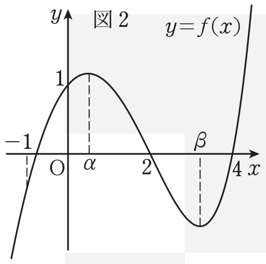
図1


図2


（**3**）（2）より，$f'(x) = 0$ は 2 つの解をもつから，$f(x)$ は極値を 2 つもち，$f(x) = 0$ の解は多くても 3 つしかもたない，$f(2) = 0,\ f(4) = 0$ であるから $f(x) = 0$ の解の 2 つは $x = 2, 4$ であり，

$f(0) = 1 > 0,\ f(-1) = \dfrac{1}{2} - 1 < 0$ であるから

$f(x) = 0$ の異なる実数解の個数は **3** である (図 2 参照)．

（**4**）（3）より $-1 < p < 0$ である．

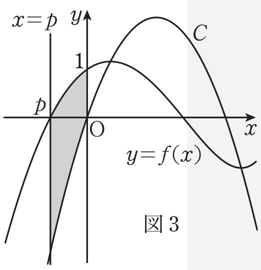


図 3

$x < 0$ のとき

$$f(x) - \left(-x^2 + \frac{2}{\log 2}x\right) = 2^x - \frac{2}{\log 2}x > 0$$

$x < 0$ で $C : y = -x^2 + \dfrac{2}{\log 2}x$ は $y = f(x)$ より下方にある．求める面積は

$$\int_p^0 \left\{2^x - x^2 - \left(-x^2 + \frac{2}{\log 2}x\right)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{2^x}{\log 2} - \frac{x^2}{\log 2}\right]_p^0 = \frac{1}{\log 2} - \frac{2^p - p^2}{\log 2}$$

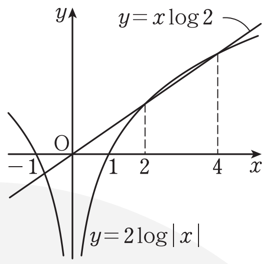
$$= \frac{1}{\log 2} - \frac{f(p)}{\log 2} = \mathbf{\frac{1}{\log 2}}$$

注意 何をしたいのかよくわからない問題である．

（3）では $2^x = x^2$ の解の個数を求めているが，これが目的なら微分は不要である．

$2^x = |x|^2$ として $x\log 2 = 2\log|x|$ とする．

曲線 $y = x\log 2$ は直線であり，曲線 $y = 2\log|x|$ は $x < 0,\ x > 0$ のそれぞれで上に凸の曲線であり，これらは $x = 2, 4$ で交わる．そして $x < 0$ で交わると，簡単にわかる．



3 数学B【ベクトルと図形（平面）】標準

▶解答◀ （**1**） $\overrightarrow{A_0B_0} = (2, 0)$，

$\overrightarrow{A_0C_0} = (1, \sqrt{3})$ より

$$\vec{p_1} = \overrightarrow{B_0B_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B_0C_0}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A_0C_0} - \overrightarrow{A_0B_0}\right) = \left(\mathbf{-\frac{2}{3}},\ \mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{A_0B_1} = \overrightarrow{A_0B_0} + \vec{p_1} = \left(\frac{4}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

$\overrightarrow{A_0C_1} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{A_0C_0} = \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ であるから

$$\vec{p_2} = \overrightarrow{B_1B_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B_1C_1}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A_0C_1} - \overrightarrow{A_0B_1}\right) = \left(\mathbf{-\frac{2}{3}},\ \mathbf{-\frac{2\sqrt{3}}{9}}\right)$$

（**2**） 図 2 を見よ．$\triangle A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ $(n \geqq 1)$ は正三角形であり，$\triangle A_nB_nB_{n-1}$，$\triangle B_nC_nC_{n-1}$，$\triangle C_nA_nA_{n-1}$ は 30° 定規である．$\overrightarrow{B_{n-1}B_n} \perp \overrightarrow{B_nB_{n+1}}$ であるから，$\vec{p_n} = \overrightarrow{B_{n-1}B_n}$ と $\vec{p_{n+2}} = \overrightarrow{B_{n+1}B_{n+2}}$ のなす角は 180° となる．

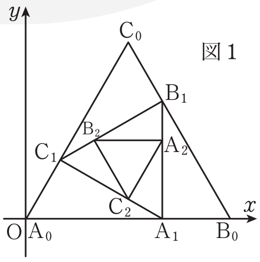


図 1

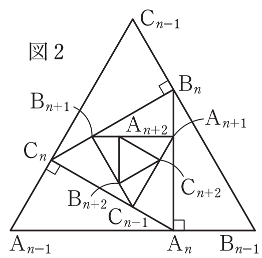


図 2

$$B_nB_{n+1} = \frac{2}{3}B_nC_n$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}C_nC_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}B_{n-1}B_n$$

であるから $|\vec{p_{n+1}}| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}|\vec{p_n}|$ である．

したがって $\overrightarrow{p_{n+2}}=-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\overrightarrow{p_n}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{p_n}}$ である．

（3）（2）より，$\overrightarrow{p_{2k-1}}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{p_{2k-3}}$ であるから

$\overrightarrow{p_{2k-1}}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}\overrightarrow{p_1}$ となる．したがって

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{p_{2k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\overrightarrow{p_1}$$
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}\overrightarrow{p_1}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\overrightarrow{p_1}}$$

（4）（3）と同様にして，$\overrightarrow{p_{2n}}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\overrightarrow{p_2}$ となるから

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{p_{2k}}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\overrightarrow{p_2}$$
$$=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\overrightarrow{p_2}$$

となる．

$$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_{2n}}}=\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}+\overrightarrow{\mathrm{B_1B_2}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{B_{2n-2}B_{2n-1}}}+\overrightarrow{\mathrm{B_{2n-1}B_{2n}}}$$
$$=\left(\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{B_{2n-2}B_{2n-1}}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{B_1B_2}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{B_{2n-1}B_{2n}}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{p_{2k-1}}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{p_{2k}}$$
$$=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\overrightarrow{p_1}+\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\overrightarrow{p_2}$$
$$=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\left(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}\right)$$

（1）より

$$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_{2n}}}=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\left(-\frac{4}{3},\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$$
$$=\left(-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0B_{2n}}}=\overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}}+\overrightarrow{\mathrm{B_0B_{2n}}}$$
$$=(2,\ 0)+\left(-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$
$$=\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

となり，点 B_{2n} の座標は

$$\boldsymbol{\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}$$

要の分析　**1**（2）は少しかわった問題であり，**2** は木に竹を接いだ設問があり最短を走らない問題は共通テストでもわかるようにギクシャク感がある．

（篠，中路，日高，遠藤，安田亨）