近畿大学・医学部-後期

試験日　2023 年 2 月 26 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1　方程式 $x^4+4x^3+7x^2+2x-5=0$ ……①
について，次の問いに答えよ．

（1）　$x=t-\alpha$ とおくと，① は t に関する方程式 $t^4+At^2+Bt+C=0$ と表される．α, A, B, C の値をそれぞれ求めよ．

（2）（1）で求めた A, B, C に対して，t に関する恒等式 $t^4+At^2+Bt+C=(t^2+a)^2+b(t+c)^2$ が成り立つ．a, b, c の値をそれぞれ求めよ．ただし，a, b, c はすべて実数とする．

（3）　方程式 ① を解け．

2　座標空間において，3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通り，中心が原点 O である球面を S とする．S と xy 平面との交線上に点 P，S と yz 平面との交線上に点 Q，S と zx 平面との交線上に点 R をとり，3 点 P，Q，R は ∠AOP = ∠BOQ = ∠COR = θ を満たしている．ただし，3 点 P，Q，R の x 座標，y 座標，z 座標はすべて 0 以上とする．このとき，θ を用いて点 P の座標を表すと $\boxed{}$ であり，点 Q，R の座標はそれぞれ $\boxed{}$，$\boxed{}$ である．また，△PQR の面積は $\boxed{}$ となる．四面体 OPQR の体積 V は $\boxed{}$ であり，V の最小値は $\boxed{}$ となる．

3　座標平面において，曲線 $C: y=|x^2-1|$ と直線 $l: y=(\tan\theta)(x+1)$ は異なる 3 点で交わる．C と l で囲まれる 2 つの部分のうち l の上側にある部分の面積を S，下側にある部分の面積を T とおくとき，次の問いに答えよ．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

（1）　$\tan\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ．

（2）　$S=T$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

（3）　$\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき，T の値を求めよ．

（4）　$T=\dfrac{2}{3}$ のとき，θ の値を求めよ．

1　数学Ⅱ【高次方程式】標準

▶解答◀　（1）　$x=t-\alpha$ を ① に代入し，

$$(t-\alpha)^4+4(t-\alpha)^3+7(t-\alpha)^2+2(t-\alpha)-5=0$$

t^3 の係数は

$${}_4\mathrm{C}_3(-\alpha)+4=-4\alpha+4=0$$

$\boldsymbol{\alpha=1}$ である．

$$(t-1)^4+4(t-1)^3+7(t-1)^2+2(t-1)-5=0$$

$$\begin{aligned}&t^4+({}_4\mathrm{C}_2+4\cdot(-3)+7)t^2\\&\quad+({}_4\mathrm{C}_1(-1)+4\cdot 3-14+2)t\\&\quad+1-4+7-2-5=0\\&t^4+t^2-4t-3=0\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A=1,\ B=-4,\ C=-3}$ である．

（2）　$t^4+t^2-4t-3=(t^2+a)^2+b(t+c)^2$

t^2，t の係数，定数項を順に比較して

$$2a+b=1 \quad\cdots\cdots②$$

$$2bc=-4 \quad\cdots\cdots③$$

$$a^2+bc^2=-3 \quad\cdots\cdots④$$

③ より $c=-\dfrac{2}{b}$ を ④ に代入して

$$a^2+\frac{4}{b}=-3 \qquad \therefore\quad (a^2+3)b+4=0$$

② より $b=1-2a$ を代入して

$$\begin{aligned}&(a^2+3)(1-2a)+4=0\\&2a^3-a^2+6a-7=0\\&(a-1)(2a^2+a+7)=0\end{aligned}$$

a は実数であるから $\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=2}$ である．

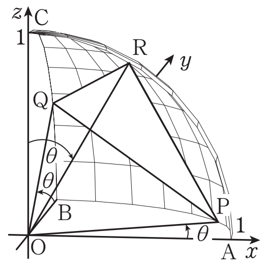
（3）　$(t^2+1)^2-(t+2)^2=0$

$$\begin{aligned}&(t^2+t+3)(t^2-t-1)=0\\&t=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\&x=t-1=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}\end{aligned}$$

2　数学B【平面の方程式】標準

考え方　平面 $ax+by+cz+d=0$ と点 (x_0, y_0, z_0) との距離は $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で求められる．

▶解答◀　P, Q, R はそれぞれ xy 平面, yz 平面, zx 平面内の単位円周上の点であるから $\mathrm{P}(\boldsymbol{\cos\theta, \sin\theta, 0})$, $\mathrm{Q}(\boldsymbol{0, \cos\theta, \sin\theta})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{\sin\theta, 0, \cos\theta})$ である. ただし, $\sin\theta \geqq 0$, $\cos\theta \geqq 0$ であるから $0 \leqq \theta \leqq 90°$ とする.



$$\mathrm{PQ} = \mathrm{QR} = \mathrm{RP}$$
$$= \sqrt{\cos^2\theta + (\sin\theta - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$
$$= \sqrt{2 - 2\sin\theta\cos\theta}$$

であるから $\triangle\mathrm{PQR}$ は正三角形である.

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{PQ}^2 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sin\theta\cos\theta)}$$

3 点 P, Q, R の 3 つの座標の和は $\sin\theta + \cos\theta$ であるから, 平面 PQR の方程式は

$$x + y + z = \sin\theta + \cos\theta$$

である. $\triangle\mathrm{PQR}$ を四面体 OPQR の底面と見るとき, その高さは原点と平面 PQR との距離に等しいから

$$\frac{|\sin\theta + \cos\theta|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{3}}$$

である.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sin\theta\cos\theta) \cdot \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{3}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}(1 - \sin\theta\cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$u = \sin\theta + \cos\theta$ とおく.

$$u^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin\theta\cos\theta = \frac{u^2 - 1}{2}$$

$u = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$ であるから, $1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$ である.

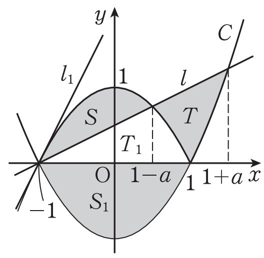
$$V = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{u^2 - 1}{2}\right)u = \frac{1}{12}(-u^3 + 3u)$$
$$\frac{dV}{du} = \frac{1}{12}(-3u^2 + 3) = -\frac{1}{4}(u^2 - 1) \leqq 0$$

であるから, V は減少する. よって, $u = \sqrt{2}$ のとき V は最小で $V = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}}$ である.

3

数学Ⅱ【面積】**標 準**

▶解答◀　(**1**)　図を見よ. $y = -x^2 + 1$ のとき $y' = -2x$ で, $x = -1$ のとき $y' = 2$ であるから (図の l_1), $\boldsymbol{0 < \tan\theta < 2}$ である.



(**2**)　$a = \tan\theta$ とおく. $x \neq -1$ として C と l の連立方程式を解いていく.

$$x^2 - 1 = a(x + 1)$$
$$x - 1 = a \qquad \therefore \quad x = 1 + a$$
$$-x^2 + 1 = a(x + 1)$$
$$1 - x = a \qquad \therefore \quad x = 1 - a$$

図のように曲線で囲まれた部分の面積を S_1, T_1 とする. 6 分の 1 公式を用いて

$$S = \frac{1}{6}(2 - a)^3,\ S_1 = S + T_1 = \frac{2^3}{6},$$
$$T + T_1 + S_1 = \frac{1}{6}(2 + a)^3$$

であるから

$$T = (T + T_1 + S_1) + S - 2S_1$$
$$= \frac{1}{6}((2 + a)^3 + (2 - a)^3 - 2 \cdot 2^3) = 2a^2$$

$S = T$ のとき, $\frac{1}{6}(2 - a)^3 = 2a^2$

$$8 - 12a + 6a^2 - a^3 = 12a^2$$
$$a^3 + 6a^2 + 12a = 8$$
$$(a + 2)^3 = 16 \qquad \therefore \quad a = 2 \cdot \sqrt[3]{2} - 2$$

$\tan\theta = \boldsymbol{2\sqrt[3]{2} - 2}$ である.

(**3**)　$a^2 = \tan^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^2$$
$$T = 2a^2 = 2(\sqrt{2} - 1)^2 = \boldsymbol{2(3 - 2\sqrt{2})}$$

(**4**)　$T = \frac{2}{3}$ のとき

$$2a^2 = \frac{2}{3} \qquad \therefore \quad a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を解いて, $\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ である.

要の分析　例年通り, 典型問題が出題されていて, 昨年よりも解きやすくなった. しかし 60 分は短時間である. パターン問題を手際よく解けるように練習しておこう.

(茅嶋, 染矢, 安田亨)