近畿大学・医学部-前期

試験日　2023年1月29日　時間60分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 袋の中に黒色さいころが2つ，赤色さいころが2つ，黄色さいころが1つ入っている．袋の5つのさいころからAさんが同時に2つ取り出したときのさいころの色と，それらを投げたときの出た目の数についてゲームを行う．

- 取り出されたさいころの色が黒の場合，出た目の数の $+1$ 倍を点数とする
- 赤の場合，出た目の数の -1 倍を点数とする
- 黄の場合，出た目の数をもう一方のさいころで得た点数に掛ける

以上のルールで得られた点数を得点とする．例えば，黒1・赤2の場合は $1-2=-1$ が得点であり，黒1・黄3の場合は $1\times3=3$ が得点となる．このとき，

（1） 得点が0である確率は $\boxed{}$ であり，得点が1である確率は $\boxed{}$ であり，得点が4である確率は $\boxed{}$ である．

（2） さらに袋に残っている3つのさいころからBさんが同時に2つ取り出したときのさいころの色と，それらを投げたときの出た目の数についても得点を考える．Aさんの得点とBさんの得点がどちらも1となる確率は $\boxed{}$ であり，どちらも4となる確率は $\boxed{}$ である．また，Aさんの得点が0であると分かっているとき，Bさんの得点が0より大きい確率は $\boxed{}$ である．

2 a を整数，n を2以上の整数として，次の問いに答えよ．

（1） a から始まる連続する n 個の整数の和が2023になる a と n の組み合わせについて考える．

（i） 全部で何通りあるか．

（ii） a と n がともに奇数となるのは何通りあるか．

（2） a から始まる連続する n 個の整数の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2，標準偏差を s とする．

（i） $\overline{x}$ を a と n の式で表せ．

（ii） s^2 を n の式で表せ．

（iii） s^2 が自然数になるときの n を小さい順に並べたものを $n_1, n_2, \cdots$ とする．$n_k=2023$ となる k の値を求めよ．

（iv） s が自然数になるときの s を小さい順に並べたものを $s_1, s_2, \cdots$ とする．s_2 の値を求めよ．

3 $\mathrm{AB}=1, \mathrm{BC}=2, \mathrm{CD}=\sqrt{3}, \mathrm{AD}=\sqrt{2}$ である四角形ABCDについて考える．ただし，どの内角も180°より小さいものとする．

（1） $\angle\mathrm{ABC}=150^\circ$ であるとき，

（i） $\angle\mathrm{ADC}$ を求めよ．

（ii） $\angle\mathrm{BAD}$ を求めよ．

（iii） 対角線BDの長さを求めよ．

（iv） 四角形ABCDの面積を求めよ．

（2） 四角形ABCDの面積の最大値を求めよ．また，そのときの対角線ACの長さを求めよ．

1

数学A【確率の雑題】標準

▶解答◀ （1） 黒を K_1, K_2, 赤を R_1, R_2, 黄色を Y で表し，例えば，黒と赤のサイコロを取り出し，それぞれの目が1と2のとき，$(K, R)=(1, 2)$ のように表すことにする．添字がないときは，$K=K_1$ または K_2，$R=R_1$ または R_2 である．また，点数の計算は $(K_1, K_2)=(2, 3)$ のときの得点は $2+3=5$ と考える．

得点が0であるのは，$(K, R)=(1, 1)$〜$(6, 6)$ となるときである．黒の選択，赤の選択が2通りずつあるから，得点が0である確率は

$$\frac{2\cdot2\cdot6}{{}_5\mathrm{C}_2\cdot6^2}=\frac{24}{10\cdot36}=\mathbf{\frac{1}{15}}$$

得点が1であるのは

$$(K, R)=(6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$$

$$(K, Y)=(1, 1)$$

のいずれかのときであるから，得点が1である確率は

$$\frac{1}{{}_5C_2\cdot 6^2}(2\cdot 2\cdot 5+2\cdot 1)=\mathbf{\frac{11}{180}}$$

得点が4であるのは

$(K,\ R)=(5,\ 1),\ (6,\ 2)$

$(K_1,\ K_2)=(3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3)$

$(K,\ Y)=(4,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 4)$

のいずれかのときであるから，得点が4である確率は

$$\frac{1}{{}_5C_2\cdot 6^2}(2\cdot 2\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3)$$
$$=\frac{8+3+6}{360}=\mathbf{\frac{17}{360}}$$

(**2**)　AとBの得点がどちらも1であるのは，

(ア)　Aが$(K,\ R)=(6,\ 5)\sim(2,\ 1)$で，Bが

$(K,\ R)=(6,\ 5)\sim(2,\ 1)$，$(K,\ Y)=(1,\ 1)$

の6通りのいずれか（Bは袋に1個ずつ残っている黒と赤を取る），または

(イ)　Aが$(K,\ Y)=(1,\ 1)$で，Bが

$(K,\ R)=(6,\ 5)\sim(2,\ 1)$

の5通り（Bは袋に残った2個の赤からどちらかを選び，黒は残っている1個を取る）のいずれかになるときである．AとBの得点がどちらも1である確率は

$$\frac{1}{{}_5C_2\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{{}_3C_2\cdot 6^2}(2\cdot 2\cdot 5\cdot 6+2\cdot 2\cdot 5)$$
$$=\frac{140}{360\cdot 108}=\mathbf{\frac{7}{1944}}$$

AとBの得点がどちらも4であるのは

(ウ)　Aが$(K,\ R)=(6,\ 2),\ (5,\ 1)$で，Bが

$(K,\ R)=(6,\ 2),\ (5,\ 1)$

$(K,\ Y)=(4,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 4)$

の5通り，または，

(エ)　Aが$(K,\ Y)=(4,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 4)$で，Bが

$(K,\ R)=(6,\ 2),\ (5,\ 1)$

の2通りのいずれかになるときである．Aが$(K_1,\ K_2)=(3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3)$のときは，Bは黒のサイコロを取り出せないからBの得点は4にはならない．AとBの得点がどちらも4である確率は

$$\frac{1}{360\cdot 108}(2\cdot 2\cdot 2\cdot 5+2\cdot 3\cdot 2\cdot 2)$$
$$=\frac{40+24}{360\cdot 108}=\mathbf{\frac{2}{1215}}$$

Aの得点が0のとき，Aは$(K,\ R)=(1,\ 1)\sim(6,\ 6)$を出しているから，袋に残っているサイコロは黒，赤，黄が1つずつである．Bの得点は0，正，負のいずれかであるが，正である確率と負である確率は等しいことに注意せよ．Bの得点が0であるのはBの出目が

$(K,\ R)=(1,\ 1)\sim(6,\ 6)$

の6通りのときであるから，Bの得点が0より大きい確率は，$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{6}{{}_3C_2\cdot 6^2}\right)=\mathbf{\dfrac{17}{36}}$ である．

2　数学B【数列の雑題】標準

▶解答◀　(**1**)(**i**)　この数列は初項a，末項$a+n-1$，項数nの等差数列だから

$$\frac{2a+n-1}{2}\cdot n=2023$$
$$n(2a+n-1)=4046$$
$$n(2a+n-1)=2\cdot 7\cdot 17^2 \quad\cdots\cdots\text{①}$$

$(2a+n-1)-n=2a-1$であるから，nと$2a+n-1$の偶奇は異なる．$n=2l$とすると

$$2l(2a+2l-1)=4046$$
$$l(2a+2l-1)=2023 \quad\cdots\cdots\text{②}$$

$n=2l+1$とすると

$$(2l+1)(2a+2l)=4046$$
$$(2l+1)(a+l)=2023 \quad\cdots\cdots\text{③}$$

②，③いずれの場合も整数lに対して整数aが求められるから，組$(a,\ n)$はそれぞれ2023の正の約数の個数だけある．ただし，$n\geqq 2$であるから③で$l=0$は除く．2023の正の約数の個数は$2\cdot 3=6$であるから，組$(a,\ n)$は$2\cdot 6-1=$**11通り**ある．

(**ii**)　nが奇数であるのは③のときで，aも奇数であるのはlが偶数のときである．

$$2l+1=7,\ 7\cdot 17,\ 7\cdot 17^2,\ 17,\ 17^2$$

を解いて，順に，$l=3,\ 59,\ 1011,\ 8,\ 144$であるから$a$と$n$がともに奇数である組$(a,\ n)$は**2通り**ある．

(**2**)(**i**)　初項a，末項$a+n-1$の等差数列の平均だから $\overline{x}=\mathbf{\dfrac{2a+n-1}{2}}$ である．

(**ii**)　変数変換$Y=X-a+1$によって分散は変わらないから

$$s^2=\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\left(\frac{(1+n)}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}$$
$$=\frac{1}{12}(n+1)(2(2n+1)-3(n+1))=\mathbf{\frac{n^2-1}{12}}$$

(**iii**)　$\dfrac{n^2-1}{12}$が自然数になるのはn^2-1が12の倍数になるときである．改めて$n=6l+r$ $(r=0,\ \pm1,\ \pm2,\ 3)$と表すと

$$\frac{n^2-1}{12}=\frac{(6l+r)^2-1}{12}=3l^2+lr+\frac{r^2-1}{12}$$

$r=\pm1$ であるから $n=6l\pm1$ である．$6l+1=2023$ のとき $l=337$ であるから $k=337\cdot2=\mathbf{674}$ である．

(iv)　$n=6l\pm1$ と表したときに

$$s^2=\frac{(6l\pm1)^2-1}{12}=3l^2\pm l=l(3l\pm1)$$

l と $3l\pm1$ は互いに素であるから，s^2 が平方数になるのは l と $3l\pm1$ がいずれも平方数になるときである．さらに，平方数は 3 で割ると割り切れるか 1 余るのいずれかであるから，l と $3l+1$ が平方数になるものについて $l=1, 4, 9, 16, \cdots$ を順に調べていく．

$l=1$ のとき，$l(3l+1)=4$

$l=16$ のとき，$l(3l+1)=16\cdot49$

であるから，$s_1=2$，$\boldsymbol{s_2=28}$ である．

注意　**【典型問題】**

（1）で $a>0, n\geqq1$ であるときは，分解 ① において $2a+n-1>n$ が成り立つから，組 (a, n) は 4046 の奇数の約数の個数と等しく 6 通りある．

3

数学Ⅱ【加法定理とその応用】**標 準**

▶解答◀　（1）（i）$\angle\mathrm{ABC}=\alpha$，$\angle\mathrm{ADC}=\beta$ とおく．$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\alpha\\&=1+4-2\cdot1\cdot2\cos\alpha\\&=5-4\cos\alpha \quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ACD}$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos\beta\\&=2+3-2\sqrt{6}\cos\beta\\&=5-2\sqrt{6}\cos\beta \quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，② より，$2\cos\alpha=\sqrt{6}\cos\beta$ $\cdots\cdots③$

$\alpha=150^\circ$ のとき

$$\sqrt{6}\cos\beta=2\cos150^\circ \qquad \therefore\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boldsymbol{\angle\mathrm{ADC}=135^\circ}$ である．

(ii)　四角形 ABCD は図 1 のように 2 つの三角定規を組み合わせた図形になるから，$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAD}=45^\circ}$

(iii)　$\mathbf{BD=1}$

(iv)　四角形 ABCD の面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

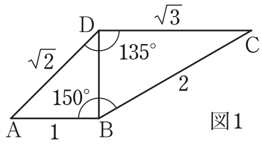

図1

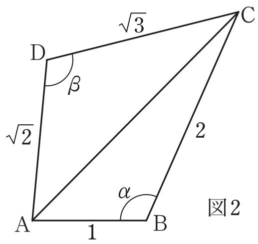

図2

(2)　$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\beta\\&=\sin\alpha+\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\beta\\2S&=2\sin\alpha+\sqrt{6}\sin\beta \quad\cdots\cdots④\end{aligned}$$

③ より

$$2\cos\alpha-\sqrt{6}\cos\beta=0 \quad\cdots\cdots⑤$$

$④^2+⑤^2$ より

$$\begin{aligned}4S^2&=(2\sin\alpha+\sqrt{6}\sin\beta)^2+(2\cos\alpha-\sqrt{6}\cos\beta)^2\\&=10-4\sqrt{6}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\&=10-4\sqrt{6}\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

これは $\alpha+\beta=180^\circ$ で最大で

$$4S^2=10+2\sqrt{24} \qquad \therefore\quad 2S=2+\sqrt{6}$$

⑤ より

$$2\cos\alpha=\sqrt{6}\cos(180^\circ-\alpha) \qquad \therefore\quad \cos\alpha=0$$

$\alpha=\beta=90^\circ$ であるから，AC を直径とする円に内接する四角形として四角形 ABCD は実現可能である．S の最大値は $\boldsymbol{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}$，$\boldsymbol{\mathrm{AC}=\sqrt{5}}$ である．

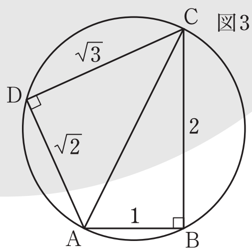

図3

要の分析　例年通りの問題構成，試験時間である．難易度は昨年並みであるが **1**，**2** のような数え上げ問題が続くとやや重い．

（茅嶋，染矢，安田亨）