近畿大学・医学部-推薦

試験日　2022 年 11 月 20 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1　(1)　1 から 5 までの自然数が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードがある．この中から 3 枚のカードを選んで，3 桁(けた)の数を作る．

(i)　これら 3 桁の数のうち，偶数は全部で $\square$ 個ある．

(ii)　これら 3 桁の数のうち，3 の倍数は全部で $\square$ 個ある．

(iii)　これら 3 桁の数のうち，6 の倍数は全部で $\square$ 個ある．

(2)　方程式 $x^2-x+1=0$ の異なる 2 つの解を α, β とする．このとき，

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\square,\ \alpha^9+\beta^9=\square$$

となる．また，任意の自然数 m に対して等式 $\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}=\alpha^m+\beta^m$ が成り立つ最小の自然数 n は $n=\square$ である．

(3)　$\angle \mathrm{A}=60^\circ$ の三角形 ABC の内部に点 P をとり，P から直線 AB に下ろした垂線の交点を D とし，P から直線 AC に下ろした垂線の交点を E とする．DE $=9$ のとき，AP $=\square\sqrt{\square}$ である．このとき，さらに，直線 AB 上に点 F をとり，直線 AC 上に点 G をとるとき，PF + FG + GP の最小値は $\square$ である．

2　座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円周上に 3 点 A，B，C がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$4\vec{a}+5\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ を満たすとする．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\square}{\square}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\square}{\square}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=\square$ である．

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\dfrac{\square}{\square}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\square$ である．

(3)　三角形 ABC の面積は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

(4)　点 A の座標が $(2, 0)$ であり，点 C の y 座標が正であるとき，点 B の座標は $\left(\dfrac{\square}{\square}, \dfrac{\square}{\square}\right)$，点 C の座標は $(\square, \square)$ である．

3　関数

$$y=2\cos^5 x-3\cos^3 x+\cos x-2\sin^5 x+3\sin^3 x-\sin x$$

を考える．ただし，$0 \leqq x<2\pi$ とする．$t=\cos x-\sin x$ とおくと，t のとりうる値の範囲は

$$-\sqrt{\square} \leqq t \leqq \sqrt{\square}$$

である．このとき，$\cos x\sin x$ と $\cos^3 x-\sin^3 x$ はそれぞれ t を用いて

$$\cos x\sin x=\frac{-t^2+\square}{\square},$$

$$\cos^3 x-\sin^3 x=\frac{-t^3+\square t}{\square}$$

と表され，関数 y は t を用いて

$$y=\frac{-t^5+\square t^3-\square t}{\square} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される．

$y=0$ となる x の値は全部で $\square$ 個あり，そのうち最も大きい値は $\dfrac{\square}{\square}\pi$ である．

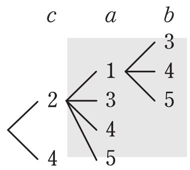
式①で表される t の関数 y を $f(t)$ とする．$y=f(t)$ が極値をとる t は4つあり，小さい方から順に a, b, c, d とする．このとき，$ac=\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$，$f(b)f(d)=\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

1　（1）数学A【順列】標準

▶解答◀　作る3桁の数を abc と表す．

（i）$c=2$ または4のときである．このとき，ab は残り4数から2つをとる順列で $4\cdot3$ 通りある．したがって，できる偶数の個数は

$$2\cdot4\cdot3=\mathbf{24}$$

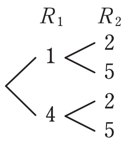


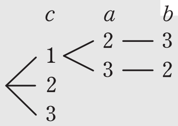
（ii）$100a+10b+c=9(11a+b)+a+b+c$

が3の倍数となるのは $a+b+c$ が3の倍数になるときである．1, 2, 3, 4, 5 を3で割った剰余で分類し

$$R_1=\{1, 4\},\ R_2=\{2, 5\},\ R_0=\{3\}$$

とする．$a+b+c$ が3の倍数になるのは，R_1, R_2, R_0 から1つずつとるときである．1, 4のどちらをとるか，2, 5のどちらをとるかで $2\cdot2=4$ 通りある．





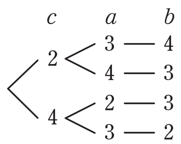
たとえばこれらが1, 2のとき，abc は1, 2, 3の順列で $3!$ 通りある．

3の倍数の個数は $4\cdot3!=\mathbf{24}$

（iii）$\{a, b, c\}=\{1, 2, 3\}$ のとき $c=2$ で，ab は2通りある．

$\{a, b, c\}=\{1, 5, 3\}$ のときは不適．

$\{a, b, c\}=\{4, 2, 3\}$ のときは $c=2$ または4で，たとえば $c=2$ のとき ab は2通りある．このときは $2\cdot2=4$ 通りある．



$\{a, b, c\}=\{4, 5, 3\}$ のときも2通りある．

全部で $2+4+2=\mathbf{8}$ 個ある．

（2）数学II【解と係数の関係】標準

▶解答◀　$x^2-x+1=0$ の2解が α, β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=1$$

このとき

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2=-1$$

また，$x^2-x+1=0$ のとき

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$$

であるから，$x=\alpha, \beta$ は $x^3+1=0$ を満たす．よって

$$\alpha^3=\beta^3=-1$$

したがって

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{-1}{1}=\mathbf{-1}$$

$$\alpha^9+\beta^9=(\alpha^3)^3+(\beta^3)^3=-1-1=\mathbf{-2}$$

ここで $\alpha^3=-1$ より，$\alpha^n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ は周期6で

$$\alpha,\ \alpha^2,\ -1,\ -\alpha,\ -\alpha^2,\ 1$$

を繰り返す．β^n についても同様であるから，$\alpha^n+\beta^n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ も周期6で

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha^2+\beta^2=-1,\ -1-1=-2,$$
$$-\alpha-\beta=-1,\ -\alpha^2-\beta^2=1,\ 1+1=2$$

を繰り返す．よって，任意の自然数 m に対して

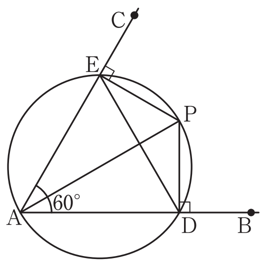
$$\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}=\alpha^m+\beta^m$$

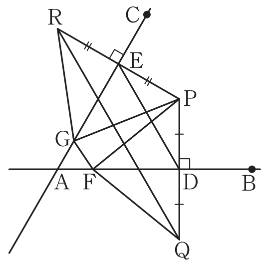
が成り立つ最小の自然数 n は $n=\mathbf{6}$ である．

（3）数学A【図形の雑題】標準

▶解答◀　$\angle\mathrm{ADP}=\angle\mathrm{AEP}=90^\circ$ であるから，四角形ADPEは，APを直径とする円 O に内接する．円 O は，△ADEの外接円であるから，正弦定理より

$$\mathrm{AP}=\frac{\mathrm{DE}}{\sin A}=\frac{9}{\sin 60^\circ}=\frac{9\cdot2}{\sqrt{3}}=\mathbf{6\sqrt{3}}$$





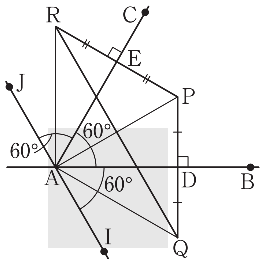
直線 AB，AC に関して，P と対称な点をそれぞれ Q，R とする．このとき，PF $=$ QF, GP $=$ GR であるから

$$\mathrm{PF}+\mathrm{FG}+\mathrm{GP}=\mathrm{QF}+\mathrm{FG}+\mathrm{GR}$$

$$\geqq \mathrm{QR}=2\mathrm{DE}=\mathbf{18}$$

等号は Q，F，G，R の順で一直線上にあるときに成り立つ．なお，中点連結定理により QR と DE は平行で QR $=$ 2DE である．

注意　図のような直線 IJ をとる．Q は半直線 AB，AI ではさまれた領域にあり，R は半直線 AC，AJ ではさまれた領域にあるから，線分 QR は線分 AB，AC と交わる．



2

数学B【ベクトルと図形（平面）】**標準**

▶解答◀　(1)　$4\vec{a}+5\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より

$$5\vec{b}=-3\vec{c}-4\vec{a}$$

$$|5\vec{b}|^2=|-3\vec{c}-4\vec{a}|^2$$

$$25|\vec{b}|^2=9|\vec{c}|^2+24\vec{c}\cdot\vec{a}+16|\vec{a}|^2$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$ であるから

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{25|\vec{b}|^2-9|\vec{c}|^2-16|\vec{a}|^2}{24}$$

$$=\frac{(25-9-16)\cdot 4}{24}=\mathbf{0}$$

同様に

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{9-16-25}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot 4=-\boldsymbol{\frac{16}{5}}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{16-25-9}{2\cdot 5\cdot 3}\cdot 4=-\boldsymbol{\frac{12}{5}}$$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$$=4+\frac{32}{5}+4=\boldsymbol{\frac{72}{5}}$$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より $\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2=4+4=\mathbf{8}$$

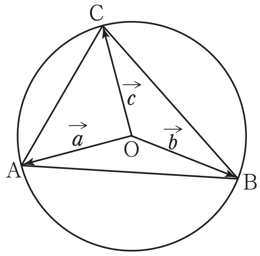
(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

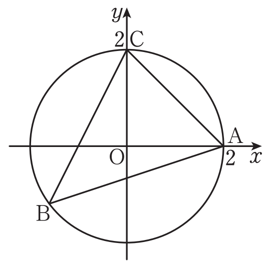
$$=4+\frac{24}{5}+4=\frac{64}{5}$$

である．また，$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$ であるから，円周角の定理より $\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$．よって，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{72}{5}}\sqrt{\frac{64}{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{24}{5}}$$





(4)　A(2, 0), $\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$ で，C の y 座標が正であるから，C の座標は $\mathbf{(0,\ 2)}$ である．

このとき，$\vec{a}=(2,\ 0)$, $\vec{c}=(0,\ 2)$ であるから

$$\vec{b}=-\frac{3\vec{c}+4\vec{a}}{5}=-\frac{3(0,\ 2)+4(2,\ 0)}{5}$$

$$=\left(-\frac{8}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$$

よって，B の座標は $\left(\boldsymbol{-\frac{8}{5},\ -\frac{6}{5}}\right)$ である．

3

数学Ⅱ【関数の増減・極値】**標準**

▶解答◀　$t=\cos x-\sin x$

$$=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ であるから，t の値域は

$$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}$$

このとき，$t^2=1-2\cos x\sin x$ であるから

$$\cos x\sin x=\boldsymbol{\frac{-t^2+1}{2}}$$

$$\cos^3 x-\sin^3 x$$

$$=(\cos x-\sin x)(1+\cos x\sin x)$$

$$=t\left(1+\frac{-t^2+1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{-t^3+3t}{2}}$$

また

$$(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^3 x-\sin^3 x)$$

$$=\cos^5 x-\sin^5 x+\cos^2 x\sin^2 x(\cos x-\sin x)$$

であるから

$$1\cdot\frac{-t^3+3t}{2}=\cos^5 x-\sin^5 x+\left(\frac{-t^2+1}{2}\right)^2 t$$

$$\cos^5 x-\sin^5 x=\frac{-t^3+3t}{2}-\frac{(-t^2+1)^2 t}{4}$$

$$=\frac{-t^5+5t}{4}$$

よって

$$y=2(\cos^5 x-\sin^5 x)-3(\cos^3 x-\sin^3 x)$$

$$+(\cos x-\sin x)$$

$$=2\cdot\frac{-t^5+5t}{4}-3\cdot\frac{-t^3+3t}{2}+t$$

$$= \boldsymbol{\frac{-t^5+3t^3-2t}{2}}$$

$y=0$ となるのは $-t^5+3t^3-2t=0$ のときで

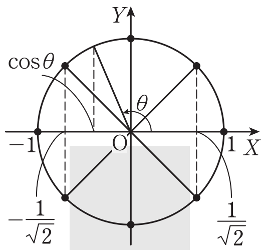
$$t(t^2-1)(t^2-2)=0$$

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ に注意して

$$t=0,\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2}$$

すなわち，$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm 1$ である．

$x+\dfrac{\pi}{4}=\theta$ とおくと $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < 2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ であるから，これを満たす x の値は，次の図の●に対する **8** 個であり，この中で最大のものは $\theta=2\pi$ のときの $\boldsymbol{\dfrac{7}{4}\pi}$ である．



$$f(t)=\frac{-t^5+3t^3-2t}{2}$$

$$f'(t)=\frac{-5t^4+9t^2-2}{2}$$

$t^2=s$ とおく．$0 \leqq s \leqq 2$

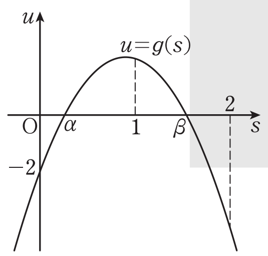
$g(s)=-5s^2+9s-2$ とおく．

$$g(0)=-2<0,\ g(1)=2>0,$$

$$g(2)=-20+18-2=-4<0$$

$g(s)=0$ は $0<s<2$ に 2 つの解をもつ．その解を $\alpha,\beta\ (0<\alpha<\beta<2)$ とする．解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{9}{5},\ \alpha\beta=\frac{2}{5}$$



t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		↘		↗		↘		↗		↘	

$$a=-\sqrt{\beta},\ b=-\sqrt{\alpha},\ c=\sqrt{\alpha},\ d=\sqrt{\beta}$$

$$ac=-\sqrt{\alpha\beta}=-\sqrt{\frac{2}{5}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{10}}{5}}$$

$$f(t)=-\frac{t}{2}(t^4-3t^2+2)=-\frac{t}{2}(t^2-1)(t^2-2)$$

であるから

$$f(b)f(d)=f(-\sqrt{\alpha})f(\sqrt{\beta})$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$$\times\left(-\frac{\sqrt{\beta}}{2}\right)(\beta-1)(\beta-2)$$

$$g(s)=-5(\alpha-s)(\beta-s)$$

$$f(b)f(d)=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{-4}\cdot\frac{g(1)}{-5}\cdot\frac{g(2)}{-5}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{-100}\cdot 2\cdot(-4)=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{125}}$$

◆別解◆　α は $5\alpha^2-9\alpha+2=0$ を満たすから

$$\alpha^2=\frac{9\alpha-2}{5}$$

$$f(b)=\frac{-b^5+3b^3-2b}{2}=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(\alpha^2-3\alpha+2)$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left(\frac{9\alpha-2}{5}-3\alpha+2\right)=-\frac{\sqrt{\alpha}}{5}(3\alpha-4)$$

β, d についても同様に考えて

$$f(d)=\frac{\sqrt{\beta}}{5}(3\beta-4)$$

したがって

$$f(b)f(d)=-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{25}(3\alpha-4)(3\beta-4)$$

$$=-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{25}\{9\alpha\beta-12(\alpha+\beta)+16\}$$

$$=-\frac{1}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{18}{5}-\frac{108}{5}+16\right)=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{125}}$$

注意

因数分解を利用した代入は藤田医大・未来 **1**（５）別解を見よ．また

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{9}{5}+1=-\frac{2}{5}$$

のように計算してもよい．

要の分析　本年度から他学部と共通の穴埋め形式になったが，60 分という試験時間を考えるとそれほど簡単ではない．いずれも典型的な問題だが，**3** は作業量が多く難しい．

（井手，楊，染矢，安田亨）