川崎医科大学

試験日　2023 年 1 月 22 日　時間 80 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，関数 $f(x)=\log_{\sin\theta}x$ がある．

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とする．$f(1)=\boxed{}$，$f(4)=\boxed{}$ である．

また，$x>0$ のとき関数 $f(2x^2+1)-f(4x^4+12x^2+9)$ は，$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる．

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする．$f(x)=\boxed{}\log_2 x$ であり，$\dfrac{f(8)}{\sqrt[3]{-f(16)}}=\boxed{}$ である．また，x の不等式

$2\{f(x)\}^2+9f(x)-5>0$ を満たす最小の自然数 x は $\boxed{}$ である．

(3) 原点を O とする座標平面で，$y=|f(x)|$ のグラフ上に 3 点をとり，y 軸に近い方から順に A，B，C とする．3 点 A，B，C は一直線上に並んでおり，A，B，C から x 軸に垂線を引き，交点をそれぞれ A′，B′，C′ とすると，OA′ : A′B′ : B′C′ = 1 : 1 : 1 である．このとき，点 C′ の x 座標は $\dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ である．また，四角形 AA′C′C の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\sin^2 2\theta=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

2 原点を O とする座標空間に，3 点 A(2, 2, 0)，B(0, 2, 2)，P(t, t, t) がある．線分 AB を直径とする球面を K とし，球面 K の中心を C とする．ただし，t は正の実数とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{}$ であり，球面 K の方程式は，$x^2+y^2+z^2-\boxed{}x-\boxed{}y-\boxed{}z+\boxed{}=0$ である．

(2) 直線 OP と球面 K の共有点を $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ とし，$\mathrm{OP_1}<\mathrm{OP_2}$ とする．$\mathrm{P_1}$ の x 座標は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ であり，$\mathrm{P_2}$ の x 座標は $\boxed{}$ である．このとき，$\triangle\mathrm{CP_1P_2}$ の面積は $\dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ である．

(3) 点 P を通り直線 OP に垂直な平面が球面 K と接するとき，接点の座標を (p, q, r) とすると，

$p=\boxed{ア}-\dfrac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$\boxed{ア}+\dfrac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ である．ただし，2 つずつある $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ にはそれぞれ同じものがはいる．このとき，2 つの p の値に対応する接点を p の値が小さい順に $\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ とし，点 $\mathrm{T_2}$ から直線 $\mathrm{OT_1}$ に垂線 $\mathrm{T_2D}$ を引くと，$\mathrm{D}\left(\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}},\ \boxed{}+\dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}},\ \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)$ である．

(4) 点 P を通り直線 OP に垂直な平面 α と球面 K の共有部分が円 R となるときを考える．ただし，平面 α が点 C を通るときを除くとする．このとき，C を頂点とし，円 R を底面とする円錐の体積の最大値は $\dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}\pi$ である．

3 (1) 関数 $f(x)=\sin^{11}x\ (-\pi\leqq x\leqq\pi)$ は，$x=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\pi$ のとき極大値 $\boxed{}$ をとり，$x=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\pi$ のとき極小値 $\boxed{}$ をとる．また，曲線 $y=f(x)$ の 5 つある変曲点の x 座標を小さい順に α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 とするとき，$\sum_{k=1}^{5}\cos^2\alpha_k=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

(2) 0 以上の整数 m, n に対して，$S(m,n)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x)^m(1+x)^n\,dx$ とすると，$S(3,1)=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

また，n を 1 以上の整数とするとき，$S(m,\ n)$ を $S(m+1,\ n-1)$, m, n を用いて表すと，

$S(m,\ n)=\dfrac{\square}{\square}S(m+1,\ n-1)$ である．

また，$S(5,\ 5)=\dfrac{\square}{\square}$ である．

（３）（１）において，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$y=f(x)$ のグラフと x 軸，および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

1　数学Ⅱ【指数・対数不等式】標 準

▶解答◀　（１）$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2 x$$

$$f(1)=\mathbf{0},\ f(4)=\mathbf{-2}$$

$$f(2x^2+1)-f(4x^4+12x^2+9)$$
$$=-\log_2(2x^2+1)+\log_2(4x^4+12x^2+9)$$
$$=\log_2\frac{4x^4+12x^2+9}{2x^2+1}$$
$$=\log_2\left(2x^2+5+\frac{4}{2x^2+1}\right)$$

ここで，相加相乗平均の不等式より

$$2x^2+5+\frac{4}{2x^2+1}=2x^2+1+\frac{4}{2x^2+1}+4$$
$$\geqq 2\sqrt{(2x^2+1)\cdot\frac{4}{2x^2+1}}+4=8$$

等号成立は $2x^2+1=\dfrac{4}{2x^2+1}$ より

$$(2x^2+1)^2=4$$
$$2x^2+1=2 \qquad \therefore\quad x^2=\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ のとき最小値 $\log_2 8=\mathbf{3}$ をとる．

（２）$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$f(x)=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}}=\mathbf{-2}\log_2 x$$

$$\frac{f(8)}{\sqrt[3]{-f(16)}}=\frac{-2\cdot 3}{\sqrt[3]{-(-2\cdot 4)}}=\frac{-6}{2}=\mathbf{-3}$$

$2\{f(x)\}^2+9f(x)-5>0$ ……………………①

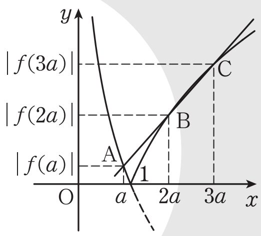
$$(2f(x)-1)(f(x)+5)>0$$
$$f(x)<-5,\ \frac{1}{2}<f(x)$$
$$-2\log_2 x<-5,\ \frac{1}{2}<-2\log_2 x$$
$$\log_2 x>\frac{5}{2},\ -\frac{1}{4}>\log_2 x$$
$$x>2^{\frac{5}{2}},\ x<2^{-\frac{1}{4}}$$

$5<2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}<6$, $2^{-\frac{1}{4}}<1$ であるから ① を満たす最小の自然数 x は $\mathbf{6}$ である．

（３）$\sin\theta=p$ とおく．$0<p<1$ である．

$$f(x)=\log_p x$$

$y=|f(x)|$ のグラフは $y=\log_p x$ のグラフの $y<0$ の部分 ($x>1$ の部分) を x 軸に関して折り返したものである (図参照)．



A′ の x 座標を a とすると

$$\mathrm{A}(a,\ |f(a)|),\ \mathrm{B}(2a,\ |f(2a)|),\ \mathrm{C}(3a,\ |f(3a)|)$$

$y=|f(x)|$ のグラフは $0<x<1$ では下に凸，$1<x$ では上に凸であるから A, B, C の 3 点すべてが $0<x<1$ の部分，または $1<x$ の部分に乗ることはない．よって，$0<a<1$ かつ $1<3a$ を満たす．

$\dfrac{1}{3}<a<1$ ………………………………………②

B は AC の中点であるから

$$2|f(2a)|=|f(a)|+|f(3a)|$$
$$2|\log_p 2a|=\log_p a-\log_p 3a$$
$$|\log_p 2a|=\frac{1}{2}\log_p\frac{1}{3}$$
$$\log_p 2a=\log_p 3^{\pm\frac{1}{2}}$$
$$2a=\sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\quad a=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

② より $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから C′ の x 座標は $3a=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$

四角形 AA′C′C は台形であるから

$$\frac{1}{2}(\log_p a-\log_p 3a)\cdot 2a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\log_p\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\quad \log_p\frac{1}{3}=1$$

$p=\frac{1}{3}$ であるから $\sin\theta=\frac{1}{3}$ である．

$$\sin^2 2\theta=(2\sin\theta\cos\theta)^2=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$=4\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}=\mathbf{\frac{32}{81}}$$

2 数学B【球面の方程式】標準

考え方　t は定数で，点 P は定点であるが，点 $(1,\,1,\,1)$ と原点 O を結ぶ直線上に動点 $\mathrm{P}(t,\,t,\,t)$ がある，と考える方が分かりやすい．

▶解答◀　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\mathbf{4}$

K の中心は $\mathrm{C}(1,\,2,\,1)$, 直径は $\mathrm{AB}=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}$ であるから，

$$K:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$$
$$K:x^2+y^2+z^2\mathbf{-2x-4y-2z+4}=0$$

(2)　$\mathrm{P}(t,\,t,\,t)$ が K 上にあるとき

$$3t^2-8t+4=0$$
$$(3t-2)(t-2)=0\qquad\therefore\quad t=\frac{2}{3},\,2$$

P_1 の x 座標は $\mathbf{\frac{2}{3}}$，P_2 の x 座標は $\mathbf{2}$ である．

$\mathrm{P}_1\left(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3},\,\frac{2}{3}\right)$，$\mathrm{P}_2(2,\,2,\,2)$，$\mathrm{C}(1,\,2,\,1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}_1}=\left(-\frac{1}{3},\,-\frac{4}{3},\,-\frac{1}{3}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{CP}_2}=(1,\,0,\,1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}_2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

$\triangle\mathrm{CP}_1\mathrm{P}_2$ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}_1}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CP}_2}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}_2})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-\frac{4}{9}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

(3)　T_1 と T_2 を結ぶ線分は球面 K の直径である．図1はO，C，P を通る平面で切ったときの断面図で，l_1，l_2 は K に接する平面である．接点を単に T と書くことにすると $\overrightarrow{\mathrm{CT}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{CT}}|=\sqrt{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CT}}=\pm\frac{|\overrightarrow{\mathrm{CT}}|}{\sqrt{3}}(1,\,1,\,1)=\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\,\frac{\sqrt{6}}{3},\,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CT}}$$
$$=\left(1\pm\frac{\sqrt{6}}{3},\,2\pm\frac{\sqrt{6}}{3},\,1\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$p=\mathbf{1\pm\frac{\sqrt{6}}{3}}$ である．

$\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ が K の直径で，$\angle\mathrm{T}_1\mathrm{DT}_2=90^\circ$ であるから D は K 上にある．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}$ とおく．D の座標は

$$k\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3},\,2-\frac{\sqrt{6}}{3},\,1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

(1)で求めた K の方程式に代入して

$$k^2\left(\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\right)$$
$$-2k\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}+2\left(2-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+4=0$$
$$\left(8-\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)k^2+\left(\frac{8\sqrt{6}}{3}-12\right)k+4=0$$
$$(6-2\sqrt{6})k^2+(2\sqrt{6}-9)k+3=0$$
$$(k-1)((6-2\sqrt{6})k-3)=0$$

$k=1$ のとき D は T_1 と一致するから

$$k=\frac{3}{6-2\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{6}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3+\sqrt{6}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3},\,\frac{6-\sqrt{6}}{3},\,\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$=\left(\mathbf{\frac{1}{2},\,2+\frac{\sqrt{6}}{2},\,\frac{1}{2}}\right)$$

図1

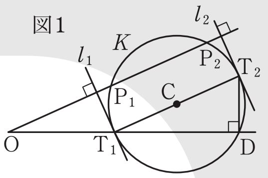
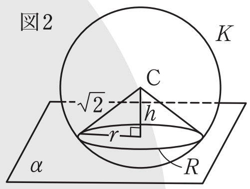


図2



(4)　図2を見よ．円 R の半径を r，K の中心 C から α までの距離を h とすると，$r^2+h^2=2\ (0<h<\sqrt{2})$ が成り立つ．円錐の体積を V とする．

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}(2-h^2)h=\frac{\pi}{3}(2h-h^3)$$
$$V'=\pi\left(\frac{2}{3}-h^2\right)$$

$h=\sqrt{\frac{2}{3}}$ のとき V は最大で

$$V=\frac{\pi}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{27}}\pi$$

♦別解♦　(1)　K 上の点を $\mathrm{X}(x,\,y,\,z)$ とする．A，B は球の直径の両端であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AX}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BX}}$ より

$$(x-2,\,y-2,\,z)\cdot(x,\,y-2,\,z-2)=0$$
$$K:x^2+y^2+z^2\mathbf{-2x-4y-2z+4}=0$$

(3)　後半：D の座標について

$s=\frac{\sqrt{6}}{3}$ とおく．

$$\mathrm{T}_1(1-s,\,2-s,\,1-s),\ \mathrm{T}_2(1+s,\,2+s,\,1+s)$$

点 D は直線 OT_1 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}$ と表せて $\mathrm{OT}_1\perp\mathrm{T}_2\mathrm{D}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_2\mathrm{D}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}_2})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}-\overrightarrow{\mathrm{OT}_2})$$
$$=k|\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}_2}=0$$

$$k((1-s)^2+(2-s)^2+(1-s)^2)$$
$$=(1-s)(1+s)+(2-s)(2+s)+(1-s)(1+s)$$
$$k(3s^2-8s+6)=6-3s^2$$
$$\left(8-\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)k=4 \qquad \therefore \quad \frac{8}{3}(3-\sqrt{6})k=4$$
$$k=\frac{3}{2(3-\sqrt{6})}=\frac{3+\sqrt{6}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k(1-s,\ 2-s,\ 1-s)$$
$$=\frac{3+\sqrt{6}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3},\ \frac{6-\sqrt{6}}{3},\ \frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$=\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ 2+\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$$

3 数学Ⅲ【数列との融合】標 準

▶解答◀　（1）　$f(x)=\sin^{11}x$

$$f'(x)=11\sin^{10}x\cos x$$

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↗		↘	

$x=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ のとき極大値 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{1}$ をとり，

$x=\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}}$ のとき極小値 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{-1}$ をとる．

$$f''(x)=11(10\sin^9 x\cos^2 x-\sin^{11}x)$$
$$=11\sin^9 x(10\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$=11\sin^9 x(11\cos^2 x-1)$$

$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}$ のときプラスマイナスそれぞれに対して x の値が 2 つずつ対応し，$\sin x=0$ のとき $x=0$ である．小さい方から並べたとき $\alpha_3=0$ で，それ以外のときは $\cos^2\alpha_k=\frac{1}{11}$ である (図 1).

$$\sum_{k=1}^{5}\cos^2\alpha_k=4\cdot\frac{1}{11}+1=\boldsymbol{\frac{15}{11}}$$

図1

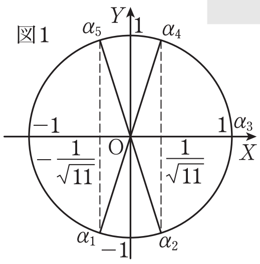
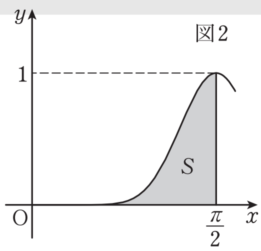


図2



（2）　$S(3,\ 1)=\int_{-1}^{1}(1-x)^3(1+x)\,dx$

$$=\int_{-1}^{1}(1-x)^3(2-(1-x))\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(2(1-x)^3-(1-x)^4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}(1-x)^4+\frac{1}{5}(1-x)^5\right]_{-1}^{1}$$
$$=8-\frac{32}{5}=\boldsymbol{\frac{8}{5}}$$
$$S(m,\ n)=\int_{-1}^{1}(1-x)^m(1+x)^n\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{m+1}(1-x)^{m+1}\right)'(1+x)^n\,dx$$
$$=-\left[\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}(1+x)^n\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{m+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{m+1}((1+x)^n)'\,dx$$
$$=\frac{n}{m+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{m+1}(1+x)^{n-1}\,dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{n}{m+1}}S(m+1,\ n-1)$$

アが①，イが④である．

$$S(5,\ 5)=\frac{5}{6}S(6,\ 4)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}S(7,\ 3)$$
$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}S(8,\ 2)$$
$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}S(9,\ 1)$$
$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{10}S(10,\ 0)$$
$$=\frac{1}{7\cdot 9\cdot 4}\int_{-1}^{1}(1-x)^{10}\,dx$$
$$=\frac{1}{7\cdot 9\cdot 4}\left[-\frac{1}{11}(1-x)^{11}\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{2^{11}}{7\cdot 9\cdot 4\cdot 11}=\boldsymbol{\frac{512}{693}}$$

（3）　求める面積を S とおく．

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{11}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\sin x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^5\sin x\,dx$$

$\cos x=c$ とおくと，$-\sin x\,dx=dc$ で，積分区間は $c:1\to 0$ に変わる．

$$S=-\int_1^0(1-c)^5(1+c)^5\,dc$$
$$=\int_0^1(1-c)^5(1+c)^5\,dc$$

$(1-c)^5(1+c)^5$ は偶関数であるから

$$S=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-c)^5(1+c)^5\,dc$$
$$=\frac{1}{2}S(5,\ 5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{693}=\boldsymbol{\frac{256}{693}}$$

要の分析　小問の中に複数の問いがあるため実質の問題数はかなり多く，80 分では見直す時間も取れそうにない．計算は落ち着いて一発で決めよう．

（田沼，茅嶋，中邨，安田亨）