関西医科大学・後期

試験日　2023 年 3 月 4 日　時間 90 分　数学I 数学II 数学III 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1　青玉が 4 個，赤玉が 4 個，白玉が 1 個，黒玉が 1 個入っている袋がある．A さんは袋から玉を 1 つ無作為に取り出し，その玉の色をある装置に入力する．この装置は入力された色の情報を離れた場所の B さんに伝達する．この装置の内部では，下の表に示すように 4 つの色の情報をそれぞれコードと呼ばれる 0 か 1 で表された 2 桁の数値に変換して伝達している．装置がこのコードを伝達するときには，0 か 1 かのどちらかの数値を上位の桁から順に伝達するが，数値を 1 つ伝達するたびに一定の確率 (20%) で，0 を 1 や 1 を 0 のように間違って伝達してしまうとき，以下の確率を求めよ．

なお，各設問の答えは解答用紙の指定欄に百分率 (%) で表し，必要があれば小数第 1 位を四捨五入して答えよ．

色	コード
青	00
赤	01
白	10
黒	11

(1)　「青」と入力された色の情報が正しく「青」と伝達される確率

(2)　「赤」と入力された色の情報が間違って「白」と伝達される確率

(3)　B さんに伝達された色の情報が「黒」である確率

(4)　B さんに伝達された色の情報が「黒」であるときに，A さんが取り出したのが黒玉である条件付き確率

2　2 つの関数を $f(x)=x^2(x+1)^2(x-1)^2$, $g(x)=x^2+1$ とおく．$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を Q，余りを R とするとき，以下の設問に答えよ．

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $y=f(x)$ の値域を求めよ．

(2)　Q と R を求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{R}{g(x)}\,dx$ を求めよ．

(4)　円周率が 3.2 より小さいことを証明せよ．

3　座標空間上の $0<x$, $0<y$, $0<z$ の領域を H とする．H 内の点 $\mathrm{P}(x_p, y_p, z_p)$ に対して，$0 \leqq x \leqq x_p$ かつ $0 \leqq y \leqq y_p$ かつ $0 \leqq z \leqq z_p$ を満たす領域を $R(\mathrm{P})$ と表す．H 内に 4 点 P_k $(k=1, 2, 3, 4)$ をとり，その座標を実数 t を用いて，$\mathrm{P}_k\,(kt,\ kt,\ 2(73-15kt))$ とそれぞれ定める．これらの点 P_k に対してそれぞれ領域 $R(\mathrm{P}_k)$ を定め，これら 4 つの領域 $R(\mathrm{P}_k)$ の和集合で表される立体を T とする．T の表面積を S とするとき，以下の設問に答えよ．

(1)　t の値の範囲を求めよ．

(2)　$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ の 4 点は同一直線上にあることを示せ．

(3)　S を t を用いて表せ．

(4)　S が最大値をとるときの t の値と P_1 の z 座標の値を求めよ．

4　t を実数とする．空間の 4 点 $\mathrm{A}(1, 5, 0)$, $\mathrm{B}(4, 2, 0)$, $\mathrm{C}(t, 2t, t-1)$, $\mathrm{D}(1, 6, 1)$ について，以下の設問に答えよ．

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ．

(2)　A，B，C，D が同一平面上にあるような t の値を求めよ．

(3)　$\angle\mathrm{BAC}$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ．

1

数学A【条件付き確率】標準

▶解答◀　装置が 1 つの数値を正しく伝達する確率は $\frac{4}{5}$，間違って伝達する確率は $\frac{1}{5}$ である．

(1)　青「00」が青「00」と伝達されるのは，2 桁の数

値とも正しく伝達されるときであるから，求める確率は

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25}=0.64=\mathbf{64\%}$$

(2)　赤「01」が白「10」と伝達されるのは，2 桁の数値とも間違って伝達されるときであるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}=0.04=\mathbf{4\%}$$

(3)（ア）　A さんが青玉を取り出し，青「00」が黒「11」と伝達されるとき．この確率は $\frac{4}{10}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{125}$

（イ）　A さんが赤玉を取り出し，赤「01」が黒「11」と伝達されるとき．この確率は $\frac{4}{10}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{125}$

（ウ）　A さんが白玉を取り出し，白「10」が黒「11」と伝達されるとき．この確率は $\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{125}$

（エ）　A さんが黒玉を取り出し，黒「11」が黒「11」と伝達されるとき．この確率は $\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{125}$

以上より，求める確率は

$$\frac{2}{125}+\frac{8}{125}+\frac{2}{125}+\frac{8}{125}=\frac{4}{25}=0.16=\mathbf{16\%}$$

(4)　B さんに伝達された色の情報が「黒」である事象を X，A さんが取り出したのが黒玉である事象を Y とおく．

$$P(X)=\frac{4}{25},\ P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}$$

であり，$X\cap Y$ は（3）の（エ）の場合であるから

$$P(X\cap Y)=\frac{8}{125}$$

$$P_X(Y)=\frac{\frac{8}{125}}{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}=0.4=\mathbf{40\%}$$

2

数学Ⅲ【定積分】**標準**

▶解答◀　**(1)**　$f(x)=x^2(x^2-1)^2$

$=(x-x^3)^2$

$h(x)=x-x^3$ とおく．$h'(x)=1-3x^2$

$0\leqq x\leqq 1$ における増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘	

$$h(0)=h(1)=0,\ h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$h(x)$ の値域は $0\leqq h(x)\leqq\frac{2}{3\sqrt{3}}$

よって，$y=f(x)$ の値域は $\mathbf{0\leqq y\leqq\frac{4}{27}}$

(2)　$f(x)=\{(x^2+1)-1\}\{(x^2+1)-2\}^2$

$=\{(x^2+1)-1\}\{(x^2+1)^2-4(x^2+1)+4\}$

$=(x^2+1)^3-5(x^2+1)^2+8(x^2+1)-4$

$=(x^2+1)\{(x^2+1)^2-5(x^2+1)+8\}-4$

$=(x^2+1)(x^4-3x^2+4)-4$

$=(x^4-3x^2+4)g(x)-4$ ………………………①

$\mathbf{Q=x^4-3x^2+4,\ R=-4}$

(3)　$I=\int_0^1\frac{R}{g(x)}\,dx=-4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx$ とおく．

$x=\tan\theta$ とおくと $dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

$$I=-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\boldsymbol{-\pi}$$

(4)　① より

$$\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\,dx=\int_0^1 Q\,dx+\int_0^1\frac{R}{g(x)}\,dx$$

$$=\int_0^1(x^4-3x^2+4)\,dx+(-\pi)$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-x^3+4x\right]_0^1-\pi=3.2-\pi$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において $\frac{f(x)}{g(x)}\geqq 0$ であり，$\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\,dx>0$ であるから $3.2-\pi>0$ すなわち $\pi<3.2$ である．よって，示された．

3

数学Ⅰ【空間図形の雑題】**標準**

▶解答◀　$R(\mathrm{P})$ は OP を対角線とする直方体である．

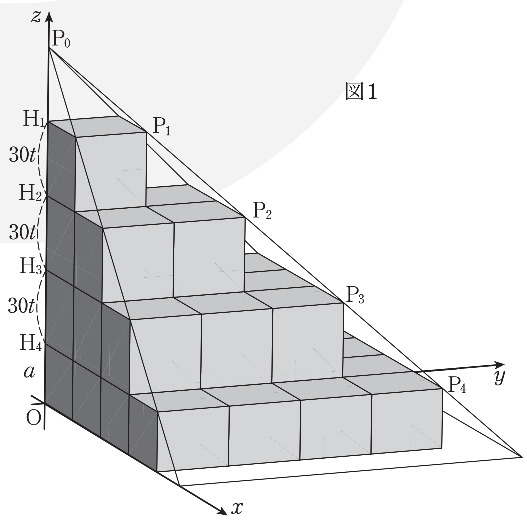
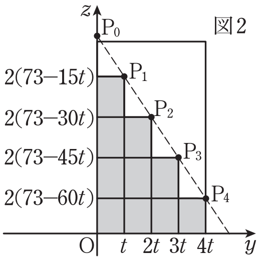


図1

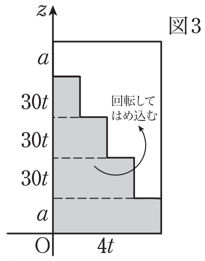
(1)　$R(\mathrm{P}_1)$, $R(\mathrm{P}_2)$, $R(\mathrm{P}_3)$, $R(\mathrm{P}_4)$ が領域 H に含まれる条件は，$t>0$ かつ $2(73-60t)>0$ であり $\mathbf{0<t<\frac{73}{60}}$

(2)　$\mathrm{P}_0(0,0,2\cdot 73)$ とし，P_k から z 軸に下ろした垂線

の足を $H_k(0, 0, 2(73-15kt))$ とする．P_k はすべて平面 $x=y$ 上にある．$\dfrac{H_kP_k}{P_0H_k}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot kt}{30kt}=\dfrac{1}{15\sqrt{2}}$ で一定であるから，P_k はすべて一直線上にある．



x軸正方向から見た図



側面は2つで長方形にする

（３）　$a=2(73-60t)$ とする．立体を x 軸の正の方向から見ると，図２のように見える．側面に関しては，すべてこの形またはこれを左右反転させた形になる．側面がすべてこのような平面図形（全部で４枚）だと考えて，１枚を180度回転して上からはめ込むと，２辺の長さが $2a+3\cdot30t$，$4t$ の長方形（全部で２つ分）と考えることができる．また，真上から見ると一辺が $4t$ の正方形（全部で２枚）に見える．

$$S=2(4t)^2+2\cdot4t(2a+3\cdot30t)$$
$$=16t(2t+146-120t+45t)$$
$$=16t\cdot73(2-t)=\mathbf{1168(-t^2+2t)}$$

（４）　$S=1168\{1-(t-1)^2\}$

$0<t<\dfrac{73}{60}$ より，$t=\mathbf{1}$ のとき最大値をとる．このとき，$P_1(1, 1, 116)$ より，z 座標は **116** である．

4　数学B【点の座標（空間）】標準

▶解答◀　（１）

$$\overrightarrow{AB}=(4, 2, 0)-(1, 5, 0)=(3, -3, 0)$$
$$\overrightarrow{BC}=(t, 2t, t-1)-(4, 2, 0)$$
$$=(t-4, 2t-2, t-1)$$
$$\overrightarrow{CA}=(1, 5, 0)-(t, 2t, t-1)$$
$$=(-t+1, -2t+5, -t+1)$$

（ア）　∠BAC が直角のとき．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ より $3(-t+1)-3(-2t+5)=0$ となり，$t=4$

（イ）　∠ABC が直角のとき．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ より $3(t-4)-3(2t-2)=0$ となり，$t=-2$

（ウ）　∠ACB が直角のとき．$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ より

$$(t-4)(-t+1)+(2t-2)(-2t+5)$$
$$+(t-1)(-t+1)=0$$
$$-6t^2+21t-15=0$$
$$2t^2-7t+5=0$$

$(t-1)(2t-5)=0$ となり $t=1, \dfrac{5}{2}$

以上より，求める t の値は $\mathbf{-2, 1, \dfrac{5}{2}, 4}$

（２）　$\overrightarrow{AB}=(3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AD}=(0, 1, 1)$ に垂直なベクトルを $\vec{v}=(a, b, c)$ とすると，内積をとって

$$3a-3b=0, b+c=0$$

$a=b, c=-b$ となり，$b=1$ として $\vec{v}=(1, 1, -1)$ を採用する．平面 ABD の方程式は

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-5)-1\cdot(z-0)=0$$
$$x+y-z-6=0$$

A，B，C，D が同一平面上にあるのは，C がこの上にあるときで $t+2t-t+1-6=0$ となるから $t=\mathbf{\dfrac{5}{2}}$

（３）　$t=4$ のときである．このとき $C(4, 8, 3)$ で，$\overrightarrow{AB}=3(1, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC}=3(1, 1, 1)$ に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a, b, c)$ とする．内積をとり

$$a-b=0, a+b+c=0$$

$b=a, c=-2a$ となる．$a=1$ として $\vec{n}=(1, 1, -2)$ を採用する．平面 ABC の方程式は

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-5)-2\cdot(z-0)=0$$
$$x+y-2z-6=0$$

D とこの距離 $h=\dfrac{|1+6-2-6|}{\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

∠BAC $=90°$ であるから

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}(3\sqrt{2})(3\sqrt{3})=\frac{9\sqrt{6}}{2}$$

四面体 DABC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

要の分析　前期に比べると解きやすい．**3** は「関医タワー」を題材としていると思われる．

（工藤，小林ゆ，染矢，長島，安田亨）