関西医科大学・前期

試験日　2023 年 1 月 28 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1　（1）　$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)-4ab$ を因数分解せよ．

（2）　$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)=4ab$ を満たす整数 a, b の組で，$a<b$ の条件を満たすものは $\boxed{\quad}$ 組あり，そのなかで a, b のどちらも正の整数となる組 (a, b) は $\boxed{\quad}$ である．

2　初項 $a_1=2$ の等差数列 $\{a_n\}$ と初項 $b_1=0$ の等差数列 $\{b_n\}$ があり，ある自然数 k に対して $a_{k+1}=b_{k+1}$ と $a_{2k+1}=0$ がどちらも成立している．これらの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を用いて，数列 $\{c_n\}$ を $c_1=1,\ c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot c_n$（ただし，$n$ は自然数）と定めるとき，以下の設問に答えよ．

（1）　a_2 を k を用いて表し，a_{k+1} の値を求めよ．

（2）　b_2 を k を用いて表し，b_{2k+1} の値を求めよ．

（3）　c_k を k を用いて表し，c_{2k} の値を求めよ．

（4）　c_n が最大値をとるときの n を，k を用いて表せ．

（5）　$\displaystyle\sum_{r=1}^{2k} c_r$ を，k を用いて表せ．

3　1 辺の長さが 2 の正三角形とその内接円の接点を A，B，C とする．点 P が内接円の円周上にあるとき，以下の設問に答えよ．

（1）　内接円の中心を O とするとき，線分 OA の長さを求めよ．

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の値を求めよ．

（3）　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ の値を求めよ．

（4）　点 P が円周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値および最小値を求めよ．

4　xy 平面において，2 点 $\mathrm{A}(3, 0),\ \mathrm{B}(-3, 0)$ からの距離の積が 12 に等しい点 P の軌跡を C とする．次の問題①，問題②からいずれか一方のみを選択し，以下の設問に答えよ．

問題①

（1）　C は x 軸および y 軸に関して対称であることを示せ．

（2）　C と x 軸，C と y 軸との交点の座標をそれぞれ求めよ．

（3）　点 P の y 座標のとりうる値の範囲を求めよ．

（4）　C で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

問題②

（1）　C は x 軸および y 軸に関して対称であることを示せ．

（2）　C と x 軸との交点の座標を求めよ．

（3）　$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+4})$ とするとき，$f'(x)$ を求めよ．また，不定積分 $\displaystyle\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx$ を求めよ．

（4）　C で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

1

数学A【不定方程式】標 準

▶解答◀　**（1）**　与式を f とする．2 乗の差を作る．

$$
\begin{aligned}
f&=(a^2-1)(b^2-1)-4ab\\
&=a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab\\
&=(a^2b^2-2ab+1)-(a^2+2ab+b^2)\\
&=(ab-1)^2-(a+b)^2\\
&=\{(ab-1)+(a+b)\}\{(ab-1)-(a+b)\}\\
&=\boldsymbol{(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)}\ \cdots\cdots\cdots\text{①}
\end{aligned}
$$

（2）　① の値が 0 になるときで

$$\{(a+1)(b+1)-2\}\{(a-1)(b-1)-2\}=0$$

$(a+1)(b+1)=2$ または $(a-1)(b-1)=2$

$(a+1,\ b+1)=(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$

または $(a-1,\ b-1)=(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$

$$(a, b)=(0, 1), (1, 0), (-2, -3), (-3, -2),$$
$$(2, 3), (3, 2), (0, -1), (-1, 0)$$

8 組のうち $a<b$ のものが **4** 組，そのうち $a>0,\ b>0$ のものは $(a, b)=\boldsymbol{(2, 3)}$

23-KNSi-zen-kakunin : 2023/02/24 (14:48)

◆別解◆　（1）　a について整理すると

$$f=(b^2-1)a^2-4ba-(b^2-1)$$
$$=(b-1)(b+1)a^2-4ba-(b-1)(b+1)$$

$$\begin{array}{lll} b+1 & b-1 & \longrightarrow\ b^2-2b+1 \\ b-1 & -(b+1) & \longrightarrow\ -(b^2+2b+1) \\ \hline & & \quad -4b \end{array}$$

よって

$$f=\{(b+1)a+(b-1)\}\{(b-1)a-(b+1)\}$$
$$=\boldsymbol{(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)}$$

2

数学B【漸化式】**標 準**

▶解答◀　（1）　数列 $\{a_n\}$ の公差を p として $a_n=2+(n-1)p$ とおける．$a_{2k+1}=0$ より $2+2kp=0$ であるから $p=-\dfrac{1}{k}$

よって，$a_n=2-\dfrac{n-1}{k}$ となり

$$a_2=\boldsymbol{2-\frac{1}{k}},\ a_{k+1}=2-\frac{k}{k}=\boldsymbol{1}$$

（2）　数列 $\{b_n\}$ の公差を q として $b_n=(n-1)q$ とおける．$a_{k+1}=b_{k+1}$ より，$1=kq$ となり $q=\dfrac{1}{k}$

よって，$b_n=\dfrac{n-1}{k}$ となり

$$b_2=\boldsymbol{\frac{1}{k}},\ b_{2k+1}=\frac{2k}{k}=\boldsymbol{2}$$

（3）　$c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}c_n=\dfrac{2-\frac{n}{k}}{\frac{n}{k}}c_n$

$$c_{n+1}=\frac{2k-n}{n}c_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$2\leqq n\leqq 2k$ のとき

$$c_n=\frac{2k-(n-1)}{n-1}\cdot c_{n-1}$$
$$=\frac{2k-(n-1)}{n-1}\cdot\frac{2k-(n-2)}{n-2}\cdot c_{n-2}$$
$$\cdots$$
$$=\frac{2k-(n-1)}{n-1}\cdot\frac{2k-(n-2)}{n-2}$$
$$\times\frac{2k-(n-3)}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-2}{2}\cdot\frac{2k-1}{1}\cdot c_1$$
$$=\frac{(2k-1)!}{(n-1)!(2k-n)!}$$
$$=\frac{(2k-1)!}{(n-1)!\{(2k-1)-(n-1)\}!}$$

よって，$c_n={}_{2k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ となり，結果は $n=1$ のときも成り立つ．

$$c_k=\boldsymbol{{}_{2k-1}\mathrm{C}_{k-1}},\ c_{2k}=\boldsymbol{1}$$

（4）　① より，$c_{2k+1}=0$ であり，これ以後は 0 が続く．例えば，$c_{2k+2}=\dfrac{2k-(2k+1)}{2k+1}c_{2k+1}=0$ となる．

（ア）　$k=1$ のときは

$$c_1=1,\ c_2=1,\ c_3=0,\ c_4=0,\ \cdots$$

となり $n=1,\ 2$ で最大になる．

（イ）　$k\geqq 2$ のとき．

$1\leqq n\leqq 2k-1$ では $c_{n+1}-c_n=\dfrac{2(k-n)}{n}c_n$ となり，

$1\leqq n\leqq k-1$ のとき，$k-n>0,\ c_n>0$ であるから，$c_n<c_{n+1}$ である．

$$c_1<c_2<\cdots<c_{k-1}<c_k,\ c_k=c_{k+1}$$

$k<n\leqq 2k$ のとき，$c_n>c_{n+1}$

$$c_{k+1}>c_{k+2}>c_{k+3}>\cdots$$

$n=k,\ k+1$ で最大になる．

いずれにしても，c_n が最大になる $\boldsymbol{n=k,\ k+1}$ である．

（5）　$\displaystyle\sum_{r=1}^{2k}c_r=\sum_{r=1}^{2k}{}_{2k-1}\mathrm{C}_{r-1}$

$$={}_{2k-1}\mathrm{C}_0+{}_{2k-1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2k-1}\mathrm{C}_{2k-1}$$
$$=(1+1)^{2k-1}=\boldsymbol{2^{2k-1}}$$

3

数学B【ベクトルと図形 (平面)】**標 準**

▶解答◀　（1）　問題文の正三角形を DEF (図 1) とする．△OAE は 60 度定規であるから

$$\mathrm{OA}=\frac{\mathrm{AE}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

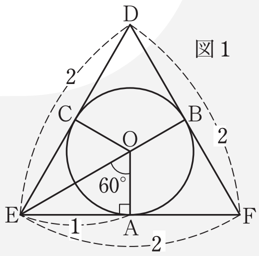


図 1

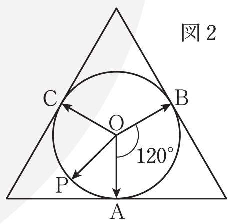


図 2

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく．

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{p}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 120^\circ=-\frac{1}{6}$$

同様に $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{1}{6}$

O は正三角形 ABC の重心であるから

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$
$$=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})$$
$$+(\vec{b}-\vec{p})\cdot(\vec{c}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})\cdot(\vec{a}-\vec{p})$$

23-KNSi-zen-kakunin : 2023/02/24 (14:48)

$$=\vec{a}\cdot\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$$
$$+\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$$
$$+\vec{c}\cdot\vec{a}-(\vec{c}+\vec{a})\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$$
$$=3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=3\cdot\frac{1}{3}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$
$$=|\vec{a}-\vec{p}|^2+|\vec{b}-\vec{p}|^2+|\vec{c}-\vec{p}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$$
$$+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$
$$+3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-0=\mathbf{2}$$

(4)　$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ に注意して
$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$$
$$=-\frac{1}{6}+\vec{c}\cdot\vec{p}+\frac{1}{3}=\vec{c}\cdot\vec{p}+\frac{1}{6}$$

ここで，$\vec{c}, \vec{p}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと
$$\vec{c}\cdot\vec{p}=|\vec{c}||\vec{p}|\cos\theta=\frac{1}{3}\cos\theta$$
$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より $-\frac{1}{3}\leqq\vec{c}\cdot\vec{p}\leqq\frac{1}{3}$

よって，最大値 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

最小値 $-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$

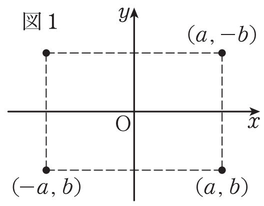
4　数学Ⅲ【体積】標準

▶解答◀　問題①

(1)　C 上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とおくと $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=12$
$$\mathrm{PA}^2\cdot\mathrm{PB}^2=144$$
$$\{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\}=144$$
$$(x-3)^2(x+3)^2+\{(x-3)^2+(x+3)^2\}y^2$$
$$+y^4-144=0$$
$$x^4-18x^2+81+(2x^2+18)y^2+y^4-144=0$$
$$x^4-2(9-y^2)x^2+y^4+18y^2-63=0 \quad \cdots\cdots③$$

点 (a, b) がこれを満たすならば
$$a^4-2(9-b^2)a^2+b^4+18b^2-63=0$$
が成り立ち，点 $(a, -b), (-a, b)$ も ③ を満たす．よって，C は x 軸および y 軸に関して対称である．

図 1



(2)　③ に $y=0$ を代入して
$$x^4-18x^2-63=0$$
$$(x^2-21)(x^2+3)=0$$
$x=\pm\sqrt{21}$ であり，x 軸との交点は
$$\mathbf{(-\sqrt{21}, 0), (\sqrt{21}, 0)}$$

③ に $x=0$ を代入して
$$y^4+18y^2-63=0$$
$$(y^2-3)(y^2+21)=0$$
$y=\pm\sqrt{3}$ であり，y 軸との交点は
$$\mathbf{(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})}$$

(3)　③ を x^2 について解くと
$$x^2=(9-y^2)\pm\sqrt{(9-y^2)^2-(y^4+18y^2-63)}$$
$$=(9-y^2)\pm\sqrt{81-18y^2+y^4-y^4-18y^2+63}$$
$$=(9-y^2)\pm6\sqrt{4-y^2}$$

根号内が 0 以上であり，$4-y^2\geqq0$ である．このとき
$$x^2=9-y^2+6\sqrt{4-y^2}>0$$
であるから，任意の $-2\leqq y\leqq2$ に対して実数 x が存在する．よって，y の値域は
$$\boldsymbol{-2\leqq y\leqq2}$$

(4)　$x^2=9-y^2-6\sqrt{4-y^2}$ に対しては
$$x^2=(4-y^2)-6\sqrt{4-y^2}+9-4$$
$$=\left(\sqrt{4-y^2}-3\right)^2-4$$
$$=\left(\sqrt{4-y^2}-1\right)\left(\sqrt{4-y^2}-5\right)\geqq0$$

ただし，$\sqrt{4-y^2}\leqq\sqrt{4}=2$ であるから $\sqrt{4-y^2}-5<0$ であり，$\sqrt{4-y^2}-1\leqq0$ となる．$\sqrt{4-y^2}\leqq1$ より $3\leqq y^2\leqq4$ となる．$x\geqq0, y\geqq0$ においては $\sqrt{3}\leqq y\leqq2$ となる．

$x_1=\sqrt{9-y^2+6\sqrt{4-y^2}}$, $x_2=\sqrt{9-y^2-6\sqrt{4-y^2}}$ とおく．

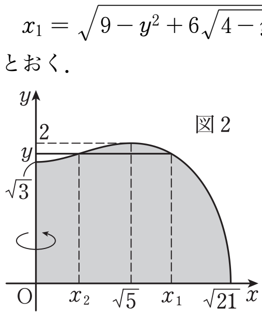


図 2

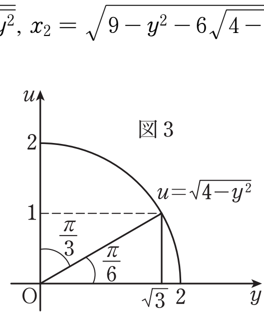


図 3

求める体積を V_y とする．上下対称性を考え

$$\frac{V_y}{2\pi}=\int_0^{\sqrt{3}}{x_1}^2\,dy+\int_{\sqrt{3}}^2({x_1}^2-{x_2}^2)\,dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left(9-y^2+6\sqrt{4-y^2}\right)dy$$

$$+12\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$=\left[9y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{3}}+6\left(\frac{\pi\cdot 2^2}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\right)$$

$$+12\left(\frac{\pi\cdot 2^2}{12}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\right)$$

$$=9\sqrt{3}-\sqrt{3}+4\pi+3\sqrt{3}+4\pi-6\sqrt{3}$$

$$=8\pi+5\sqrt{3}$$

$$V_y=\boldsymbol{16\pi^2+10\sqrt{3}\pi}$$

$\sqrt{4-y^2}$ の積分は図 3 で求める．

問題 ②

(1)　問題 ①（1）と同じ．

(2)　問題 ①（2）と同じ．

(3)　$f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}$$

また，$I=\int\sqrt{x^2+4}\,dx$ とおくと，部分積分より

$$I=\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\int(x)'\sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{(x^2+4)-4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int\sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$+4\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-I+4f(x)+C_1$$

よって

$$2I=\boldsymbol{x\sqrt{x^2+4}+4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C_1}$$

となる．C_1 は積分定数である．

(4)　③ を y について整理すると

$$y^4+2(x^2+9)y^2+x^4-18x^2-63=0$$

これを y^2 について解くと

$$y^2=-(x^2+9)\pm\sqrt{(x^2+9)^2-(x^4-18x^2-63)}$$

$$=-(x^2+9)\pm 6\sqrt{x^2+4}$$

$y^2\geqq 0$ より

$$y^2=-(x^2+9)+6\sqrt{x^2+4}$$

x のとりうる値の範囲は $-\sqrt{21}\leqq x\leqq\sqrt{21}$ であり，求める体積を V_x とすると，左右対称性より

$$\frac{V_x}{2\pi}=\int_0^{\sqrt{21}}y^2\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{21}}\left(-x^2-9+6\sqrt{x^2+4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-9x+3x\sqrt{x^2+4}\right.$$

$$\left.+12\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right]_0^{\sqrt{21}}$$

$$=-7\sqrt{21}-9\sqrt{21}+15\sqrt{21}$$

$$+12\log(\sqrt{21}+5)-12\log 2$$

$$V_x=\boldsymbol{\left(24\log\frac{5+\sqrt{21}}{2}-2\sqrt{21}\right)\pi}$$

要の分析　**1**，**3** は解きやすいので完答を狙いたい．**4** は選択制となっているが，問題 ② の方が解きやすいのではないだろうか．

（工藤，小林ゆ，染矢，長島，安田亨）