東京女子医科大学

試験日　2023 年 2 月 1 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （1）　$23^x=8$，$184^y=16$ を満たす x, y がある．このとき，$\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}$ の値を求めよ．

（2）　片方の面のみにアルファベットが 1 つ書かれたカードが 5 枚ある．その内訳は，A，I，O が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，Y が書かれたカードが 2 枚である．アルファベットが書かれた面を見えないようにシャッフルして重ね，上から順番にひいて円形に並べた．時計回りに「YAYOI」になる並べ方の確率を求めよ．ただし，カードの順番を維持したまま回転させて同じ並びになれば，同じ並べ方であるものとする．

2 1 年ごとの複利法の金融商品があり，年度初めの投資額に年利率 r %をかけた金額が利息として年度末に支払われる．複利法とは投資額に利息を繰り入れその加算額を次期の投資額とする計算法である．たとえば，年利率 5 %の金融商品に対して，初年度初めに 1 万円を投資すると年度末には 500 円の利息が得られ投資額は 10500 円となる．2 年目初頭にさらに 1 万円を追加投資すると投資額は 20500 円となり，その 5 %が 2 年目末に利息として得られる．この金融商品に毎年度初めに a 円を追加で投資することにした．

（1）　n 年目末の投資額を S_n とするとき，S_n を S_{n-1} および，a と r を用いて表せ．ただし $n \geqq 2$ とする．

（2）　S_n を n の式で表せ．

（3）　年利率 3 %，毎年度初めの投資額を 60 万円とするとき，10 年目末の投資額のうち利息によって得られる金額を求めよ．なお，$(1.03)^{10}=1.34$ とする．

3 平面上に三角形 ABC があり，その内部に点 D を定める。このとき，$\mathrm{DB}=a$，$\angle\mathrm{DBC}=10^\circ$，$\angle\mathrm{DBA}=20^\circ$，$\angle\mathrm{DCB}=30^\circ$，$\angle\mathrm{DAB}=40^\circ$ が成り立っているものとする．

（1）　$\sin 40^\circ$ の値を b とおいたとき，辺 AB 及び辺 BC の長さをそれぞれ a, b を用いて表せ．

（2）　直線 BD 上に，$\mathrm{AH_1}$ と BD が垂直になるよう点 $\mathrm{H_1}$ をとる．また，直線 BD 上に，$\mathrm{CH_2}$ と BD が垂直になるよう点 $\mathrm{H_2}$ をとる．このとき，$\mathrm{BH_1}$ 及び $\mathrm{BH_2}$ の長さをそれぞれ a を用いて表せ。

（3）　$\mathrm{BH_1}-\mathrm{BH_2}$ の値を求めよ．

4 a, b を定数，e を自然対数の底として，

$f(x)=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$

とする．次の問いに答えよ．

（1）　$f'(x)=e^{-x}\sin x$ となる a，b を求めよ．

（2）　不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ．

（3）　自然数 n に対し，定積分 $S_n=\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(-1)^{n-1}e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ．

（4）　（3）で求めた S_n に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の和を求めよ．

1

（1）　数学Ⅱ【指数の計算】基本

▶解答◀　$23^x=2^3$，$(23\cdot 8)^y=2^4$

$23=2^{\frac{3}{x}}$，$23\cdot 8=2^{\frac{4}{y}}$

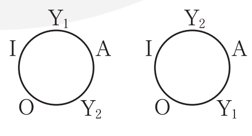
前者を後者で割ると

$2^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=\dfrac{1}{8}=2^{-3}$

$\boldsymbol{\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-3}$

（2）　数学A【確率の雑題】基本

▶解答◀　2 枚の「Y」を区別して，$\mathrm{Y_1}$，$\mathrm{Y_2}$ とする．5 個の文字 $\mathrm{Y_1}$, $\mathrm{Y_2}$, A, O, I による円順列は，$(5-1)!=24$ 通りあり，時計回りに YAYOI と並ぶのは，



の 2 通りであるから，求める確率は $\dfrac{2}{24}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

注意 **【確率に円順列は関係ない】**「並べ方の確率」という表現はよくない．「俺はそんな並べ方はしない」と言われるかもしれない．「YAYOI という文字列が現れる確率」である．また，確率では，円順列のお約束「回転させて同じ並びになれば，同じ並べ方である」など，関係ない．別の順列であるとしても確率は同じ

になる．

5 文字を円形の 5 つの異なる席に置くとき（全部で 5! 通りある）中心からグルッと見渡すとき，「YAYOI」という文字列が現れる場合，A をどこに置くかで 5 通りあり，2 つの Y をどこに置くかで 2 通りあるから，求める確率は $\dfrac{5\cdot 2}{5!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

2

数学B【漸化式】標 準

▶解答◀（1）

$$S_n=\boldsymbol{\left(1+\frac{r}{100}\right)(S_{n-1}+a)} \quad \cdots\cdots ①$$

（2） $S_0=0$ とおく．$S_1=\left(1+\dfrac{r}{100}\right)a$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ．

$$100\beta=(100+r)(\beta+a) \quad \cdots\cdots ②$$

とおく．$\beta=-\dfrac{100+r}{r}a$ となる．

①－② より

$$S_n-\beta=\left(1+\frac{r}{100}\right)(S_{n-1}-\beta)$$

となる．数列 $\{S_n-\beta\}$ は等比数列であるから

$$S_n-\beta=(S_0-\beta)\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$S_n=\beta\left\{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^n\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{100+r}{r}a\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}}$$

（3） 10 年後の元利合計は

$$S_{10}=\frac{103\cdot 60}{3}(1.03^{10}-1)$$

$$=103\cdot 20(1.34-1)=700.4\ (万円)$$

であり，10 年間に積み立てた元金は $10a=600$ 万円であるから，10 年間の金利によって増えた金額は

$$S_{10}-600=100.4(万円)=\textbf{1004000 円}$$

3

数学Ⅱ【三角関数の図形への応用】やや難

▶解答◀（1） △ABD において，正弦定理より

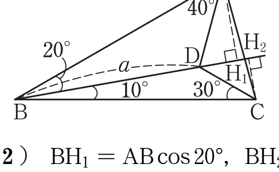
$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 120^\circ}=\frac{\mathrm{BD}}{\sin 40^\circ}$$

$$\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{BD}\sin 120^\circ}{\sin 40^\circ}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}a}{2b}}$$

△DBC において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 140^\circ}=\frac{\mathrm{BD}}{\sin 30^\circ}$$

$$\mathrm{BC}=\frac{\mathrm{BD}\sin 140^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\mathrm{BD}\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}=\boldsymbol{2ab}$$



（2） $\mathrm{BH_1}=\mathrm{AB}\cos 20^\circ$，$\mathrm{BH_2}=\mathrm{BC}\cos 10^\circ$ である．

$\cos 40^\circ=c$ とおくと

$$\cos 20^\circ=\cos(60^\circ-40^\circ)$$

$$=\cos 60^\circ\cos 40^\circ+\sin 60^\circ\sin 40^\circ=\frac{c+\sqrt{3}b}{2}$$

$$\cos 10^\circ=\cos(40^\circ-30^\circ) \quad \cdots\cdots ①$$

$$=\cos 40^\circ\cos 30^\circ+\sin 40^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}c+b}{2}$$

であるから

$$\mathrm{BH_1}=\frac{\sqrt{3}a}{2b}\cdot\frac{c+\sqrt{3}b}{2}=\frac{a}{4b}(\sqrt{3}c+3b) \quad \cdots\cdots ②$$

$$\mathrm{BH_2}=2ab\cdot\frac{\sqrt{3}c+b}{2}=ab(\sqrt{3}c+b) \quad \cdots\cdots ③$$

$c=\sqrt{1-b^2}$ であるから

$$\mathrm{BH_1}=\boldsymbol{\frac{a(\sqrt{3}\sqrt{1-b^2}+3b)}{4b}}$$

$$\mathrm{BH_2}=\boldsymbol{ab(\sqrt{3}\sqrt{1-b^2}+b)}$$

（3） ②，③ より

$$\mathrm{BH_1}-\mathrm{BH_2}=\frac{a}{4b}\{\sqrt{3}c(1-4b^2)+(3b-4b^3)\}$$

3 倍角の公式より

$$3b-4b^3=3\sin 40^\circ-4\sin^3 40^\circ$$

$$=\sin(3\cdot 40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c(1-4b^2)=c\{1-4(1-c^2)\}=-3c+4c^3$$

$$=-3\cos 40^\circ+4\cos^3 40^\circ=\cos(3\cdot 40^\circ)=-\frac{1}{2}$$

よって

$$\mathrm{BH_1}-\mathrm{BH_2}=\frac{a}{4b}\left\{\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\boldsymbol{0}$$

◆別解◆（3） $\mathrm{BH_1}-\mathrm{BH_2}=\mathrm{DH_1}-\mathrm{DH_2}$

$$=\mathrm{AD}\cos 60^\circ-\mathrm{DC}\cos 40^\circ \quad \cdots\cdots ④$$

である．△ABD において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin 20^\circ}=\frac{\mathrm{BD}}{\sin 40^\circ}$$

$$\mathrm{AD}=\frac{\mathrm{BD}\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{a\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{a}{2\cos 20^\circ}$$

△DBC において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{DC}}{\sin 10^\circ}=\frac{\mathrm{BD}}{\sin 30^\circ}$$

$$\mathrm{DC}=\frac{\mathrm{BD}\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ}=2a\sin 10^\circ$$

④ より

$$\mathrm{BH_1}-\mathrm{BH_2}$$

$$=\frac{a}{2\cos 20^\circ}\cos 60^\circ-2a\sin 10^\circ\cos 40^\circ$$

$$=\frac{a}{4\cos 20^\circ}(1-8\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ)$$

ここで，$X=8\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$ とおくと

$$X\cos 10^\circ=8\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$$

$= 4\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$

$= 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ = \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

$\cos 10^\circ \neq 0$ であるから $X = 1$

よって，$\mathrm{BH_1} - \mathrm{BH_2} = \mathbf{0}$ となり，$\mathrm{H_1}$ と $\mathrm{H_2}$ は一致する．

注意 答えは一通りではない．例えば ① で

$$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ = 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ = 2bc$$

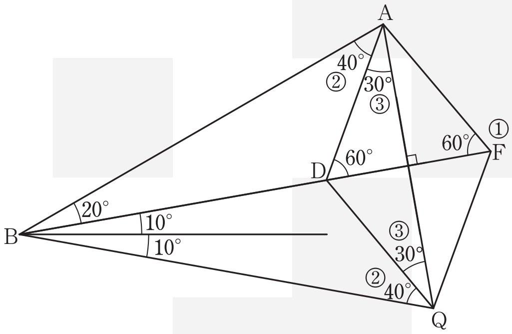
とすれば，

$$\mathrm{BH_2} = 2ab \cdot 2bc = 4ab^2c = 4ab^2\sqrt{1-b^2}$$

となる．

◆別解◆ **【初等幾何による解答】**

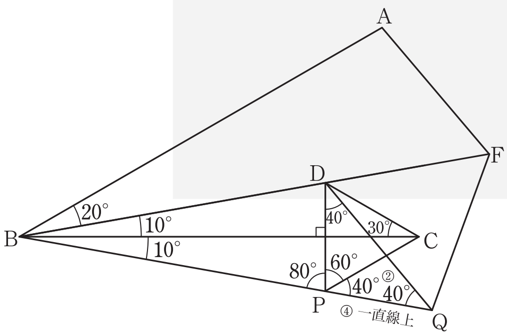
初等幾何とは，高校で平面幾何と呼ぶ幾何の正式用語であり，elementary geometry という．



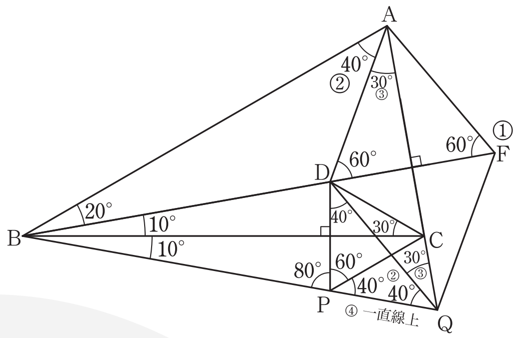
① 直線 BD の延長上に点 F を取って，三角形 ADF が正三角形になるようにする．上図の ① は 1 つ目のステップということである．

② 次に直線 BD に関して A の対称点 Q をとる．$\angle\mathrm{DQB} = \angle\mathrm{DAB} = 40^\circ$ に移り，

③ $\angle\mathrm{DAQ} = \angle\mathrm{DQA} = 30^\circ$ になる．$\angle\mathrm{BQA} = 70^\circ$

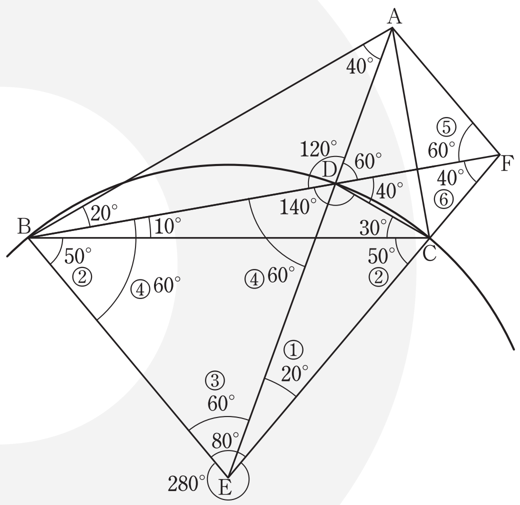


④ 直線 BC 関して D の対称点 P をとる．三角形 DCP が正三角形になる．$\angle\mathrm{ABP} = 40^\circ$, $\angle\mathrm{ABQ} = 40^\circ$ だから B，P，Q は一直線上にある．$\angle\mathrm{BPD} = 80^\circ$, $\angle\mathrm{DPC} = 60^\circ$ だから，その残りの角で $\angle\mathrm{CPQ} = 40^\circ$ になる．直線 BQ に対して PC と BA は 40° の角をなすから，PC // BA である．$\angle\mathrm{DPQ} = 100^\circ$，$\angle\mathrm{PQD} = 40^\circ$ だから $\angle\mathrm{PDQ} = 40^\circ$ になり，三角形 PQD は二等辺三角形である．三角形 DPC は正三角形であるから PQ，PD，PC はすべて等しく，$\mathrm{PQ} = \mathrm{PC}$ である．頂角 40° の二等辺三角形の底角は 70° であるから $\angle\mathrm{PQC} = 70^\circ = \angle\mathrm{BQA}$ だから，Q，C，A は一直線上にある．



よって $\angle\mathrm{DAC} = 30^\circ$ となり，AC と BF は直交する．

◆別解◆ ① などは上の解答とは無関係である．



$\angle\mathrm{BDA} = 120^\circ$ など，計算できるところは計算しておく．三角形 BEC の外接円を描く．BD の延長と，EC の延長の交点を F とする．$\angle\mathrm{ADF} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{FDC} = 40^\circ$，大きい方の中心角 $\angle\mathrm{CEB} = 2\angle\mathrm{CDB} = 280^\circ$，小さい方の中心角 $\angle\mathrm{CEB} = 80^\circ$ など，計算できるところは計算しておく．

以下，① などはステップを進むに従って計算出来る角を表す．

① $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の円周角が 10° であるから中心角 $\angle\mathrm{CED} = 20^\circ$

② $\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{ECB} = 50^\circ$

③ $\angle\mathrm{BED} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$

④ 三角形 EDB は $\angle\mathrm{EDB} = 60^\circ$ の二等辺三角形であるから，正三角形であり，底角 $\angle\mathrm{EBD} = \angle\mathrm{EDB} = 60^\circ$ となる．すると $\angle\mathrm{EDB} + \angle\mathrm{BDA} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ だから E，D，A は一直線上にある．

⑤　$\angle \mathrm{ABF} = \angle \mathrm{AEF} = 20^\circ$ であるから A，B，E，F は同一円周上にある．

⑤　$\angle \mathrm{AFB} = \angle \mathrm{AEB} = 60^\circ = \angle \mathrm{ADF}$ となり，三角形 ADF は正三角形である．

⑥　$\angle \mathrm{EFB} = \angle \mathrm{EAB} = 40^\circ = \angle \mathrm{CDF}$ となり，三角形 CDF は二等辺三角形である．

　よって三角形 CFA と三角形 CDA は合同で．AC と DF は直交し，問題文の $\mathrm{H_1}$ と $\mathrm{H_2}$ は一致し，

$\mathrm{BH_1} - \mathrm{BH_2} = \mathbf{0}$ である．

4　数学Ⅲ【定積分】標 準

▶解答◀　（1）

$$f(x) = e^{-x}(a\sin x + b\cos x)$$

$$f'(x) = -e^{-x}(a\sin x + b\cos x) + e^{-x}(a\cos x - b\sin x)$$

$$= e^{-x}\{-(a+b)\sin x + (a-b)\cos x\}$$

$f'(x) = e^{-x}\sin x$ であるから

$$-(a+b) = 1,\ a - b = 0$$

よって，$a = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$，$b = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

（2）（1）より，$a = b = -\frac{1}{2}$ のとき

$$f'(x) = e^{-x}\sin x$$

であるから，

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = f(x) + C$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C}\ \textbf{（}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数）}$$

（3）$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

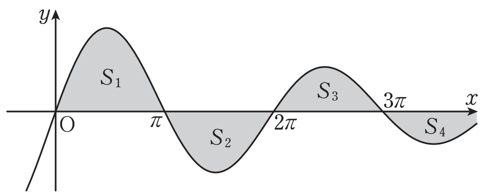
$$= -\frac{1}{2}\Big[\, e^{-x}(\sin x + \cos x) \,\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-n\pi}\cos n\pi - e^{-(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi)$$

$$= -\frac{1}{2}\{e^{-n\pi}(-1)^n - e^{-n\pi+\pi}(-1)^{n-1}\}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(1+e^{\pi})}{2}e^{-n\pi}$$

よって，$S_n = \boldsymbol{\frac{1+e^{\pi}}{2}e^{-n\pi}}$



（4）数列 $\{S_n\}$ は公比 $e^{-\pi}$ の等比数列であり，$0 < e^{-\pi} < 1$ であるから，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{1+e^{\pi}}{2}e^{-\pi} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$$

である．

要の分析　**2**，**4** はいずれも等比級数がらみの出題で易しくはないが，参考書などでよく見かける問題である．**3** は小問誘導にしたがって計算を進めるだけだが，答えがいく通りも考えられるなど，計算に手間がかかる．**3** 以外で着実に得点をしておきたい．

（友田，清水，鈴木伊，安田亨）