順天堂大学・医学部

試験日　2023 年 2 月 3 日　時間 70 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1　(1) (i)　複素数 z に対して，$w=z^2$ とおく．点 z が複素数平面上の点 $\dfrac{3}{8}$ を通り，虚軸に平行な直線上を動くとする．このとき，$z=\dfrac{3}{8}+yi,\ w=u+vi$ とおくと $u=\dfrac{\square}{\square}-\dfrac{\square}{\square}v^{\square}$ という関係が得られるので，点 w は複素数平面上で実軸と点 $\dfrac{\square}{\square}$ で交わり，虚軸と $\pm\dfrac{\square}{\square}i$ の 2 点で交わる放物線を描く．

(ii)　複素数 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とおく．点 z が複素数平面上の点 $2i$ を通り，実軸に平行な直線上を動くとする．このとき $z=x+2i,\ w=u+vi$ とおくと $u^2+v^2=\dfrac{1}{x^2+\square}$ となり，

$u^2+\left(v+\dfrac{\square}{\square}\right)^{\square}=\dfrac{\square}{\square}$ という関係が得られるので，点 w は複素数平面上で点 $\dfrac{\square}{\square}i$ を中心とする半径 $\dfrac{\square}{\square}$ の円を描く．ただし点 $\square$ を除く．

(2)　座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\,-1),\ \mathrm{P}(x_1,\,y_1),\ \mathrm{Q}(x_2,\,y_2)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の関係があるとき，

$x_1=\square x_2+\square,\ y_1=\square y_2+\square$ となる．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たしながら点 P が曲線 $l_1: y=x^3-3x$ 上を動くとき，点 Q は曲線 $l_2: y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上を動く．ただし，$a=\square,\ b=\square,$

$c=\square,\ d=\dfrac{\square}{\square}$ である．

このような関係があるとき，曲線 l_1 と曲線 l_2 は点 A を相似の中心として相似の位置にあるといい，相似比は $1:2$ である．

曲線 l_1 と曲線 $l_3: y=\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{\square}{\square}x-\dfrac{11}{4}$ が相似の位置にあるとき，3 次の係数より相似比は $\square:1$ であり，相似の中心は $\mathrm{B}\left(\square,\,\square\right)$ である．

(3) (i)　初項 1，公比 $-\dfrac{4}{5}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，$S_n<\dfrac{1}{2}$ を満たす n の最大値は $n=\square$ である．ただし，$\log_{10}2$ の小数点第 4 位までの近似値は 0.3010 である．

(ii)　一般項が $a_n=\sin^n\left(\dfrac{2}{3}n\pi\right)$ である数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}a_n=\dfrac{\square\sqrt{\square}+\square}{\square}$ である．また，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\square\sqrt{\square}+\square}{\square}$ である．

2　(1)　点 O を原点とする座標空間において，2 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\,\dfrac{1}{2},\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \mathrm{B}\left(\sqrt{3},\,-\dfrac{1}{2},\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる．$\triangle\mathrm{OAB}$ は 1 辺の長さが $\square$ の正三角形である．

t を実数として，$0\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき平面 $z=t$ と辺 OA は点 $\left(\square t,\,\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}t,\,t\right)$ で交わり，平面 $z=t$ と辺 AB は点 $\left(\sqrt{\square},\,\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}t,\,t\right)$ で交わる．

△OAB を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体を V とすると，立体 V と平面 $z=t$ は $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき交わりを持ち，そのときの立体 V の平面 $z=t$ による切り口は半径 $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}t$ と $\sqrt{\square+\dfrac{\square}{\square}t^2}$ の同心円で囲まれた部分となる．したがって，切り口の面積は $\left(\square-\square t^2\right)\pi$ となり，V の体積は $\square\sqrt{\square}\,\pi$ となることがわかる．

（2） 3 点 O，A，B を通る円 C は中心が点 $\left(\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square},\ \square,\ \square\right)$，半径が $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ の円であり，$z=\sqrt{\square}\,y$ で表される平面上にある．円 C と平面 $z=t$ は $\square \leqq t \leqq \square$ のとき交点を持ち，その交点の座標は $\left(\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}\left(\square \pm \sqrt{\square-t^2}\right),\ \dfrac{\sqrt{\square}}{\square}t,\ t\right)$ と表される．したがって，円 C とその内部からなる円板を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積は $\dfrac{\square}{\square}\pi^2$ である．

3 $P(s,\,t)$ を $s,\,t$ の整式とする．

（1） $A=s^3+2s^2t+3st^2+4t^3$ と $B=s+t$ を s の整式と考えて，A を B で割った商と余りを求めよ．

（2） $P(s,\,t)=f_n(t)s^n+f_{n-1}(t)s^{n-1}+\cdots+f_1(t)s+f_0(t)$ とおく．ただし，$f_n(t),\,f_{n-1}(t),\,\cdots,\,f_0(t)$ は t の整式とし，$f_n(t)\neq 0$ とする．このとき，$s,\,t$ の整式 $Q(s,\,t)$ と t の整式 $R(t)$ を使って

$$P(s,\,t)=Q(s,\,t)(s-t)+R(t)$$

と表せることを数学的帰納法を用いて示せ．

（3） $P(x,\,y)=-P(y,\,x)$ であるとき，1 次式 $(s-t)$ は整式 $P(s,\,t)$ の因数であることを示せ．ただし，$P(x,\,y)$ は $P(s,\,t)$ に $s=x,\ t=y$ を代入して得られる整式をあらわし，$P(y,\,x)$ は $P(s,\,t)$ に $s=y,\ t=x$ を代入して得られる整式をあらわす．

（4） 1 次式 $(s-t)$ が整式 $P(s,\,t)$ の因数であることは $P(x,\,y)=-P(y,\,x)$ であることの十分条件ではないことを示せ．

1　（1） 数学Ⅲ 【複素数と図形】 標準

▶解答◀　（i） $w=\left(\dfrac{3}{8}+yi\right)^2$

$$=\left(\frac{9}{64}-y^2\right)+\frac{3}{4}yi$$

であるから，

$$u=\frac{9}{64}-y^2,\ \ v=\frac{3}{4}y$$

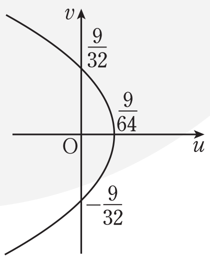
となる．これより，$y=\dfrac{4}{3}v$ であるから

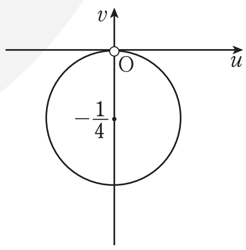
$$u=\frac{9}{64}-\left(\frac{4}{3}v\right)^2=\boldsymbol{\frac{9}{64}-\frac{16}{9}v^2}$$

$u=0$ とすると

$$\frac{9}{64}-\frac{16}{9}v^2=0 \qquad \therefore\quad v=\pm\frac{9}{32}$$

であるから，w は実軸と $\boldsymbol{\dfrac{9}{64}}$ で交わり，虚軸と $\boldsymbol{\pm\dfrac{9}{32}i}$ で交わる放物線を描く．





（ii） $w=\dfrac{1}{x+2i}=\dfrac{x}{x^2+4}-\dfrac{2}{x^2+4}i$

であるから，

$$u=\frac{x}{x^2+4},\ \ v=-\frac{2}{x^2+4}$$

となる．$v\neq 0$ より

$$\frac{u}{v}=-\frac{x}{2} \qquad \therefore\quad x=-\frac{2u}{v}$$

これより

$$v=-\frac{2}{\left(-\dfrac{2u}{v}\right)^2+4}$$

$$v=-\frac{v^2}{2u^2+2v^2}$$

$$u^2+v^2=-\frac{v}{2}\left(=\frac{1}{x^2+4}\right)$$

$$\boldsymbol{u^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}} \quad \cdots\cdots①$$

よって，w は点 $\boldsymbol{-\frac{1}{4}i}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ の円を描く．①において $v=0$ とすると $u=0$ となるから，点 **0** は w の軌跡から除かれる．

注意 (ii) において，横着をしていきなり u^2+v^2 を計算するのは数学的にはあまり好ましくない．

◆別解◆ w の軌跡を求めるだけなら，次のようにする．$w=\frac{1}{z}$ より，$z=\frac{1}{w}$ かつ $w\neq 0$ である．$w=u+vi$ とおくと

$$z=\frac{1}{u+vi}=\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}i$$

z の虚部が 2 であることから

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=2 \qquad \therefore\ u^2+v^2=-\frac{v}{2}$$

となり，これから原点を除いたものが w の軌跡となる．

(2) **数学B**【平面ベクトルの成分表示】**標準**

▶解答◀ $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より

$$(x_2+1,\ y_2+1)=\frac{1}{2}(x_1+1,\ y_1+1)$$

$$x_1=2(x_2+1)-1=\boldsymbol{2x_2+1}$$

$$y_1=\boldsymbol{2y_2+1}$$

P は l_1 上にあり，$y_1={x_1}^3-3x_1$ を満たしているから，

$$2y_2+1=(2x_2+1)^3-3(2x_2+1)$$

$$y_2=4{x_2}^3+6{x_2}^2-\frac{3}{2}$$

よって，Q は l_2 : $y=\boldsymbol{4x^3+6x^2+0x-\frac{3}{2}}$ 上を動く．次に，$\mathrm{B}(p,\ q)$, $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$ とし，l_1 と l_3 の相似比を $1:k\ (k>0)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より

$$(x_3-p,\ y_3-q)=\frac{1}{k}(x_1-p,\ y_1-p)$$

$$x_1=k(x_3-p)+p=kx_3-(k-1)p$$

$$y_1=ky_3-(k-1)q$$

P は l_1 上にあるから

$$ky_3-(k-1)q=\{kx_3-(k-1)p\}^3$$
$$-3\{kx_3-(k-1)p\} \quad \cdots\cdots①$$

これを y_3 について解いたときの ${x_3}^3$ の係数は $\frac{k^3}{k}=k^2$ である．これが $\frac{1}{4}$ となるから，$k=\frac{1}{2}$ である．よって，相似比は $1:\frac{1}{2}=\mathbf{2:1}$ である．このとき①は

$$\frac{1}{2}y_3+\frac{1}{2}q=\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}p\right)^3-3\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}p\right)$$

$$y_3=\frac{1}{4}{x_3}^3+\frac{3}{4}p{x_3}^2$$
$$+\left(\frac{3}{4}p^2-3\right)x_3+\left(\frac{1}{4}p^3-3p-q\right)$$

となる．R が l_3 上にあるから，2 次の係数を比較して

$$\frac{3}{4}p=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ p=1$$

これより l_3 の 1 次の係数は $\frac{3}{4}\cdot 1^2-3=\boldsymbol{-\frac{9}{4}}$ であり，定数項を比較すると

$$\frac{1}{4}\cdot 1^3-3\cdot 1-q=-\frac{11}{4} \qquad \therefore\ q=0$$

となるから，相似の中心は $\mathbf{(1,\ 0)}$ である．

注意 通常，相似比は逆である．P，Q がそれぞれ l_1, l_2 上を動き，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たしているのだから，l_1 と l_2 の相似比は $2:1$ とするのが普通である．

(3) **数学Ⅲ**【無限等比級数】**標準**

▶解答◀ (i) $S_n=\dfrac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}<\frac{1}{2}$

$$1-\left(-\frac{4}{5}\right)^n<\frac{9}{10} \qquad \therefore\ \left(-\frac{4}{5}\right)^n>\frac{1}{10}$$

n が奇数のとき，左辺は負となるから，これは成立しない．n が偶数のとき，$\left(-\frac{4}{5}\right)^n=\left(\frac{4}{5}\right)^n$ であるから，$\left(\frac{4}{5}\right)^n>\frac{1}{10}$ の両辺の常用対数をとって

$$n\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)>-1$$

$$n(2\log_{10}2-\log_{10}5)>-1$$

$$n\{2\log_{10}2-(1-\log_{10}2)\}>-1$$

$$n(3\log_{10}2-1)>-1$$

$$n<\frac{-1}{3\log_{10}2-1}=\frac{1}{0.0970}=10.3\cdots$$

よって，$S_n<\frac{1}{2}$ を満たす n の最大値は **10** である．

(ii) $a_1=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$a_2=\sin^2\frac{4}{3}\pi=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4},$$

$$a_3=\sin^3 2\pi=0,$$

$$a_4=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{9}{16},$$

$$a_5=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=-\frac{9\sqrt{3}}{32},\ a_6=0$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{6}a_n=\frac{7}{32}\sqrt{3}+\frac{21}{16}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}+42}{32}}$$

となる．一般に，$a_{3k}=0$ である．ここで，$T_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$, $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ とおくと

$$T_{3N}=\sum_{k=0}^{N}(a_{3k+1}+a_{3k+2}+a_{3k+3})$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\{\alpha^{3k+1}+(-\alpha)^{3k+2}\}$$

$$\to \frac{\alpha}{1-\alpha^3}+\frac{(-\alpha)^2}{1-(-\alpha)^3}=\frac{\alpha}{1-\alpha^3}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{8}{8-3\sqrt{3}}+\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{8+3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}(8+3\sqrt{3})+6(8-3\sqrt{3})}{37}$$

$$=\frac{14\sqrt{3}+84}{37}\quad (N\to\infty)$$

また，$\left|\sin\frac{2}{3}n\pi\right|<1$ より $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるから

$$\lim_{N\to\infty}T_{3N+1}=\lim_{N\to\infty}T_{3N+2}=\frac{14\sqrt{3}+84}{37}$$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\boldsymbol{\frac{14\sqrt{3}+84}{37}}$ である．

注意 $\lim_{N\to\infty}T_{3N}$ だけ考えて，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{14\sqrt{3}+84}{37}$ と結論づけるのは時期尚早である．

2

数学Ⅲ【体積】標準

▶解答◀ こうした話題は 50 年近く前に流行したものである．昨今はあまり出題されていないから，むしろ新しく感じるかもしれない．

図1

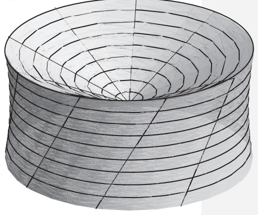
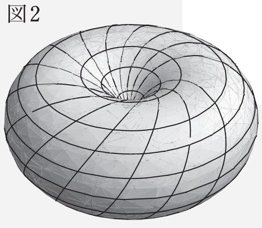


図2



生徒だけではなく，最近の若い大人も慣れていないだろうから，解説も交えて書く．前半の三角形の回転は，図 1 のような，回転一葉双曲面（円柱ではなく，少し，へこみがある）と 2 つの円錐面で囲まれた図形になっている．後半の斜めになった円の回転は，図 2 のベーグルのような立体になる．

図3

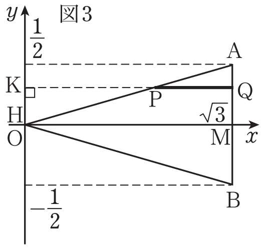


図4

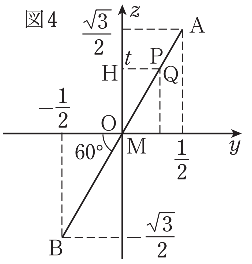


図5

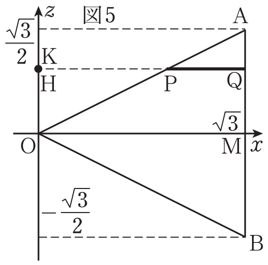
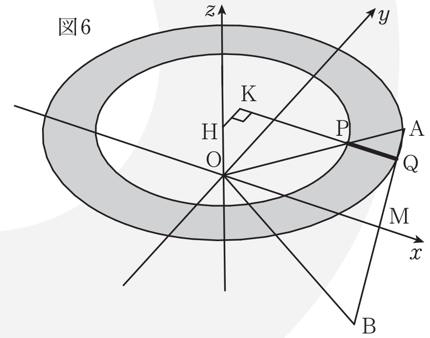


図 3（z 軸の正方向から見た図）を見よ．本書を机の上に乗せて広げているとする．z 軸は机に垂直に，上方に向かって伸びている．実際の A は机に垂直に上方に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ だけ上がったところ，実際の B は机に垂直に下方に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ だけ下がったところにある．AB の中点 $\mathrm{M}(\sqrt{3},0,0)$ は x 軸上にあり，正三角形の板を，OM を軸として 60 度回転した状態になっている．図 4 を見よ．x 軸の正方向から見た図である．「60 度回転した状態」は図のように見える．

図 5 を見よ．これは y 軸の負の方向から見た図である．このようにしてあちこちから見ると落ち着く．

(1) 座標計算をすると $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=2$ であるから，△OAB は 1 辺の長さが **2** の正三角形となる．

図6



三角形を平面 $z=t$ で切る．$0\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき平面 $z=t$ と辺 OA の交点を P，AB との交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(s\sqrt{3},\ \frac{s}{2},\ \frac{s\sqrt{3}}{2}\right)$ とおけて，P の z 座標が t であるから $\frac{s\sqrt{3}}{2}=t$ であり，$s=\frac{2t}{\sqrt{3}}$ である．$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{2t,\ \frac{\sqrt{3}}{3}t,\ t}\right)$ である．P は OA を $s:(1-s)$ に内分する．Q も MA を $s:(1-s)$ に内分する．図 5 で PQ は x 軸に平行であることに注意せよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{2t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\left(1-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3},0,0)+\frac{2t}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\boldsymbol{\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}t,\ t} \right)$$

$\mathrm{H}(0,\,0,\,t)$ とし，P から yz 平面に下ろした垂線の足を $\mathrm{K}\left(0,\ \dfrac{t}{\sqrt{3}},\ t\right)$ とする．K は y 座標と z 座標は P，Q と同じである．線分 PQ（図 6 の太線部分）を z 軸の周りに回転すると，H を中心とする 2 つの同心円に挟まれたドーナツ板を描く．事情があって，三平方の定理を用いる．

$$\mathrm{HP}^2 = \mathrm{HK}^2 + \mathrm{KP}^2 = \frac{t^2}{3} + 4t^2$$

$$\mathrm{HQ}^2 = \mathrm{HK}^2 + \mathrm{KQ}^2 = \frac{t^2}{3} + 3$$

$$\mathrm{HP} = \frac{\sqrt{39}}{3}t,\ \mathrm{HQ} = \sqrt{3 + \frac{t^2}{3}}$$

であるから，V の $z = t$ における切り口は半径 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{39}}{3}t}$ と $\boldsymbol{\sqrt{3 + \dfrac{1}{3}t^2}}$ の同心円で囲まれた部分となる．切り口の面積を S とすると $S = \pi(\mathrm{HQ}^2 - \mathrm{HP}^2)$ となる．これは $S = \boldsymbol{(3 - 4t^2)\pi}$ と計算できる．xy 平面に関する上下対称性を考えると，V の体積は

$$2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} S(t)\,dt = 2\pi\left[\,3t - \frac{4}{3}t^3\,\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = \boldsymbol{2\sqrt{3}\pi}$$

となる．

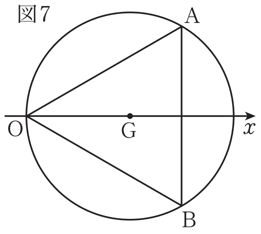
なぜわざわざ三平方の定理を用いたかの説明をしよう．三平方の定理を用いた式を見れば HK が消え，
$S(t) = \pi(\mathrm{KQ}^2 - \mathrm{KP}^2)$ になることに注意せよ．
これは y 座標成分が無視できることを意味する．図 5 の三角形 OAB を z 軸の周りに回転したものを考えてもよい．円柱から 2 つの円錐を引くと考え

$$V = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = 2\sqrt{3}\pi$$

となる．勿論，実際の立体は最初に書いたように円柱から円錐を抜いたものではない．等積変形できるというだけである．

（**2**） 図 7 を見よ．△OAB の重心 G は $\mathrm{G}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$ で，正三角形より重心と外心が一致するから，円 C の中心は $\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0}\right)$，半径は $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ である．

図7



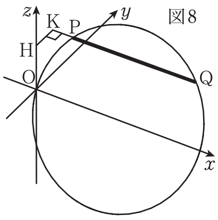


図8

さらに図 4 で，平面 OAB と xy 平面のなす角が 60° であった．平面 OAB の方程式は $\boldsymbol{z = \sqrt{3}y}$ である．円 C は G を中心，半径 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ の球と平面 $z = \sqrt{3}y$ の交線であるから，C の方程式は

$$\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3},\ z = \sqrt{3}y$$

で与えられる．y を消去すると

$$\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{4z^2}{3} = \frac{4}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．$z = t$ とおくと

$$\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{4t^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}(1 - t^2)$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}(1 \pm \sqrt{1 - t^2})$$

となる．$\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(1 + \sqrt{1 - t^2})$，
$\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(1 - \sqrt{1 - t^2})$ とおく．C と $z = t$ が交点をもつのは $1 - t^2 \geqq 0$，すなわち $\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1}$ のときであり，共有点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}(1 \pm \sqrt{1 - t^2}),\ \frac{\sqrt{3}}{3}t,\ t}\right)$$

である．この 2 点を $\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}t,\ t\right)$，$\mathrm{Q}\left(\beta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}t,\ t\right)$ とする．円板 C を回転してできる立体を平面 $z = t$ で切ったときの断面積を S とすると，（1）と同様に

$$S = \pi(\mathrm{HQ}^2 - \mathrm{HP}^2) = \pi(\mathrm{KQ}^2 - \mathrm{KP}^2)$$
$$= \pi(\beta^2 - \alpha^2) = \pi(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)$$
$$= \pi\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{1 - t^2}$$
$$= \frac{16}{3}\pi\sqrt{1 - t^2}$$

となるから，求める体積は

$$2\int_0^1 S\,dt = 2\cdot\frac{16}{3}\pi\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt$$
$$= 2\cdot\frac{16}{3}\pi\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi^2}$$

最後の積分は半径 1 の四分円の面積を利用した．

注意　**【正射影を回転する】**

正射影というのは平面に垂直に影を落とすことである．

① は C を xz 平面に正射影した曲線を表す．(2) の体積は，これで囲まれた図形を z 軸の周りに回転した体積を考えてもよい．真面目に積分してもよいが，パップス・ギュルダンの定理を用いると早い．なお，パップス・ギュルダンの定理は「平面上に，面積 S の平面図形 F（重心を G とする）と直線 l があり，G と l の距離を L とする．また，l が F の内部を通らないとし，F を l の周りに一回転してできる立体の体積を V とする．$V=S\cdot 2\pi L$ になる」という公式である．ただし，高校では一般図形の重心の定義（モーメントを用いる）を習わないから，高校では証明ができない．

図9

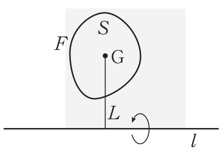
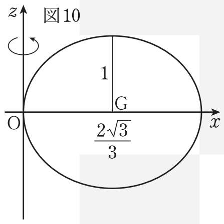


図10



楕円 ① は長半径は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，短半径は 1 で，楕円の面積 $S=\pi\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 1$ であり，回転軸との距離は $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である．体積 V は

$$V=\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1\cdot\left(2\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8}{3}\pi^2$$

となる．パップス・ギュルダンの定理は曲線に対称性があると証明できるが，それは普通に積分することと変わらない．

3

数学B【数学的帰納法】**標準**

考え方　整式は方言である．多項式というのが大学以降の数学のオーソドックスである．

▶解答◀　(1)　$A=(s^2+ts+2t^2)B+2t^3$

であるから，商は $\boldsymbol{s^2+ts+2t^2}$，余りは $\boldsymbol{2t^3}$ である．

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & s^2+ts+2t^2 \\
s+t\,\big) & s^3+2ts^2+3t^2s+4t^3 \\
 & s^3+ts^2 \\ \hline
 & ts^2+3t^2s+4t^3 \\
 & ts^2+t^2s \\ \hline
 & 2t^2s+4t^3 \\
 & 2t^2s+2t^3 \\ \hline
 & 2t^3
\end{array}$$

(2)　$n=0$ のとき

$$f_0(t)=0(s-t)+f_0(t)$$

とかけるから，成立する．

$n=1, 2, \cdots, k$ で成立しているとする．このとき，$k+1$ 次式 $P(s, t)$ について

$$P(s, t)=f_{k+1}(t)s^k(s-t)$$
$$+\{P(s, t)-f_{k+1}(t)s^{k+1}+f_{k+1}(t)s^kt\}$$

とかける．このとき，$P(s, t)-f_{k+1}(t)s^{k+1}+f_{k+1}(t)s^kt$ の s^{k+1} の係数は

$$f_{k+1}(t)s^{k+1}-f_{k+1}(t)s^{k+1}=0$$

であるから，これはたかだか k 次式である．これより帰納法の仮定から，ある $Q(s, t)$, $R(t)$ が存在して

$$P(s, t)-f_{k+1}(t)s^{k+1}+f_{k+1}(t)s^kt$$
$$=Q(s, t)(s-t)+R(t)$$

という形でかけるから

$$P(s, t)=f_{k+1}(t)s^k(s-t)+Q(s, t)(s-t)+R(t)$$
$$=\{f_{k+1}(t)s^k+Q(s, t)\}(s-t)+R(t)$$

となる．ゆえに，$n=k+1$ のときも成立する．

よって，数学的帰納法により示された．

(3)　$P(x, y)=-P(y, x)$ について $x=y=t$ を代入すると

$$P(t, t)=-P(t, t) \qquad \therefore\quad P(t, t)=0$$

これは $P(t, t)$ が多項式として 0 という意味である．ここで，多項式 $Q(s, t)$, $R(t)$ を用いて

$$P(s, t)=Q(s, t)(s-t)+R(t)$$

とかき，$s=t$ とすると

$$P(t, t)=R(t)$$

この左辺は多項式として 0 であるから，$R(t)$ も多項式として 0 になる．よって，$P(s, t)=Q(s, t)(s-t)$ とかけるから，$s-t$ は $P(s, t)$ の因数になる．

(4)　$P(s, t)=(s-t)^2$ とおくと

$$P(x, y)=(x-y)^2=(y-x)^2=P(y, x)$$

となり，$P(s, t)$ は多項式として 0 でないから

$P(y, x)\neq -P(y, x)$ であることを合わせると，$s-t$ が $P(s, t)$ の因数であることは $P(x, y)=-P(y, x)$ であるための十分条件ではないことが示された．

注意　**【交代式と対称式】**

2 変数の多項式において，本問のように

$P(x, y)=-P(y, x)$ を満たすような $P(s, t)$ を交代式，$P(x, y)=P(y, x)$ を満たすような $P(s, t)$ を対称式という．$P(s, t)$ が交代式のとき必ず $s-t$ を因数にもち，対称式のとき必ず $s+t$ を因数にもつ．

要の分析　昨年に比べて **1** の計算量は増えたが，難易度は昨年並みである．**2** の体積は空間座

標の扱いが苦手だと差をつけられてしまうだろう．**3** の多項式についての出題は珍しく，面食らった生徒も多いかもしれない．ただ，そこまで難しくはないので，麺食らうようにペロッと平らげたい．

（塩崎，松岡，安田亨）