兵庫医科大学

試験日　2023 年 1 月 25 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1 （1） 次の不等式を満たす整数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

$$6^n < 5^{20} < 6^{n+1}$$

（2） 実数 x, y が $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ を満たすとき，

（i） $|x| + |y|$ の最小値とそのときの x および y の値を求めよ．

（ii） $|x| + |y|$ の最大値とそのときの x および y の値を求めよ．

（3） xyz 空間において，2 点 $(5, 1, 2)$, $(-3, 7, 12)$ を直径の両端とする球面がある．この球面が，z 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

（4） 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 (x+2)(x-1)^9\, dx$$

（5） 次の文章は，『貯蓄額や所得の多い少ないは「学歴」と関係あるのか？』という記事からの抜粋である．

表は厚生労働省の令和元年国民生活基礎調査から，学歴ごとの平均所得金額（15 歳以上の雇用者 1 人あたり）をまとめたものです．（中略）

男性・女性ともに専門学校・短大・高専卒の方が所得金額が多いのに，総数となると高校・旧制中卒の方が多いのは統計上の謎です．

	小学・中学卒業	高校・旧制中卒業	専門学校・短大・高専卒業	大学・大学院卒業
総数	245.2 万円	303.5 万円	278.6 万円	487.4 万円
男性	300.8 万円	404.6 万円	409.0 万円	584.6 万円
女性	160.5 万円	186.1 万円	216.6 万円	291.5 万円

男性の所得金額も女性の所得金額もともに，専門学校・短大・高専卒業の方が，高校・旧制中卒業より多いのに，総数（男性＋女性）では，逆転した結果になっている．これはどうしてか，説明しなさい．

2 以下の問いに答えよ．なお，途中の式や考え方等も記入すること．

（1） 点 $(3, -2)$ を，原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転したときの点の座標を求めよ．

（2） 3 点 $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(3, -2)$, C について，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとき，点 C の座標を求めよ．

複素数平面上で原点 O と 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OAB}$ がある．直線 OB に関して点 A と対称な点を C，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする．

（3） 点 $\mathrm{C}(\gamma)$ とするとき，$\gamma = \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ であることを示せ．ただし，$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$ と共役な複素数を $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}$ で表すとする．

（4） 辺 AB と直線 DC が平行なとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ はどのような三角形か，求めよ．

3 以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数とし，$0! = 1$ とする．なお途中の式や考え方等も記入すること．

（1） S_1 を

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_1$ を求めよ．

（2） S_2 を

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{(k+2)!}$$

とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_2$ を求めよ．

（3） S_3 を

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{(k+3)!}$$

とするとき，$\lim_{n\to\infty} S_3$ を求めよ．

（4）次の和 S_p を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ．ただし，p は自然数とする．

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{(k+p)!}$$

1　（1）数学Ⅱ【指数・対数不等式】基本

▶解答◀　底を 6 とする対数をとると

$$n < 20\log_6 5 < n+1 \quad \cdots\cdots①$$

ここで，

$$20\log_6 5 = 20\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}6}$$
$$= 20\cdot\frac{1-\log_{10}2}{\log_{10}2+\log_{10}3}$$
$$= 20\cdot\frac{1-0.3010}{0.3010+0.4771} = 17.96\cdots$$

であるから，① を満たす n は **17** である．

（2）数学Ⅱ【領域と最大・最小】標準

考え方　$|x|+|y| = k$ は原点を中心として 4 点 $(k, 0), (0, k), (-k, 0), (0, -k)$ を頂点とする正方形を表す．$x \geqq 0, y \geqq 0$ のとき $x+y = k$ となり，これは $(k, 0)$ および $(0, k)$ を切片とする直線である．x を $-x$, y を $-y$ に変えても式は変わらないから，この図形は x 軸，y 軸，原点に対してそれぞれ対称である．解答ではこれを基本知識として使う．

▶解答◀　$|x|+|y| = k$ とおく．
$x^2-2x+y^2-3 = 0$ は $(x-1)^2+y^2 = 4$ となり，この円を C とする．$|x|+|y|$ で表される図形は一般に正方形となる．これが C と共有点を持つときを考える．なお $k \geqq 0$ である．

（i）図 1 のようになるとき最小で，$k = \mathbf{1}$ である．また，そのとき $\boldsymbol{(x, y) = (-1, 0)}$ である．

（ii）図 2 のようになるとき最大である．図 2 内の 45 度定規を考えると，このとき $k = \mathbf{1+2\sqrt{2}}$ である．同様に x 軸に対して対称な点でも接しているから，そのとき $\boldsymbol{(x, y) = (1+\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})}$ である．

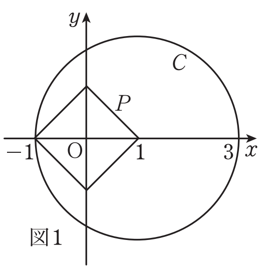

図1

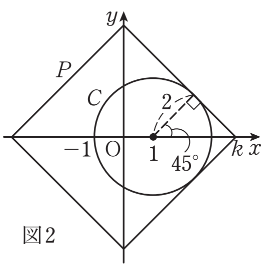

図2

◆別解◆　（ii）最大になるのは図 2 のように C と $x+y = k$ が第 1 象限で接するときである．$x+y = k$ と $(1, 0)$ の距離が 2 となるから $\dfrac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2$ であり，$k > 1$ であるから $k-1 = 2\sqrt{2}$ で最大値は $k = \mathbf{1+2\sqrt{2}}$ である．

（3）数学B【球面の方程式】基本

▶解答◀　直径の両端をそれぞれ A, B とすると，AB の中点の座標は $\left(\dfrac{5-3}{2}, \dfrac{1+7}{2}, \dfrac{2+12}{2}\right)$，すなわち $(1, 4, 7)$ であり，AB の長さは $\sqrt{8^2+(-6)^2+(-10)^2} = 10\sqrt{2}$ であるから，この球面の中心は $(1, 4, 7)$，半径は $5\sqrt{2}$ となり，その方程式は

$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-7)^2 = 50$$

となる．これと z 軸との交点は，$x = y = 0$ とすれば

$$(-1)^2+(-4)^2+(z-7)^2 = 50$$
$$(z-7)^2 = 33 \qquad \therefore\ z = 7\pm\sqrt{33}$$

であるから，この球面が z 軸から切り取る線分の長さは $(7+\sqrt{33})-(7-\sqrt{33}) = \mathbf{2\sqrt{33}}$ である．

（4）数学Ⅲ【定積分】基本

▶解答◀　$\displaystyle\int_0^1 (x+2)(x-1)^9\,dx$

$$= \int_0^1 \{(x-1)+3\}(x-1)^9\,dx$$
$$= \int_0^1 \{(x-1)^{10}+3(x-1)^9\}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{11}(x-1)^{11}+\frac{3}{10}(x-1)^{10}\right]_0^1$$
$$= -\left(-\frac{1}{11}+\frac{3}{10}\right) = -\mathbf{\frac{23}{110}}$$

（5）数学Ⅰ【データの整理と代表値】標準

▶解答◀　高校・旧制中卒業の男性の割合を p，女性の割合を $1-p$ とすると，高校・旧制中卒業の総数は

$$404.6p+186.1(1-p) = 218.5p+186.1 \text{ 万円}$$

専門学校・短大・高専卒業の男性の割合を q，女性の割合を $1-q$ とすると専門学校・短大・高専卒業の総数は

$$409.0q+216.6(1-q) = 192.4q+216.6 \text{ 万円}$$

となる．これより，p が大きく，q が小さいと

$$218.5p+186.1 > 192.4q+216.6$$

となることがある．すなわち，逆転した結果は**高校・旧制中卒業においては男性の割合が高く，専門学校・短大・高専卒業においては女性の割合が高いから**と考えられる．

2 数学Ⅲ【複素数と図形】標準

▶解答◀　点 $(x,\ y)$ と $x+yi$ を同一視する．

（1）　$(3-2i)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=(3-2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-1\right)i$$

であるから，点 $(3,\ -2)$ を原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したときの点の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{3}{2}+\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\sqrt{3}-1}\right)$ である．

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を A を中心に $\pm\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるから，$\mathrm{C}(z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に対応する複素数が $(3-2i)-(1+i)=2-3i$ であることから

$$z-(1+i)=(2-3i)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\left(\pm\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$z-(1+i)=(2-3i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z-(1+i)=\left(1\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\pm\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)i$$

$$z=\left(2\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\pm\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)i$$

$\mathrm{C}\left(\boldsymbol{2\pm\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \pm\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right)$ **（複号同順）**である．

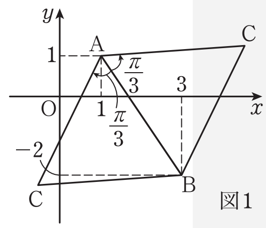

図1

（3）　図2を見よ．3点 A，B，C に対して β で割るという相似変換を行うと図3のようになる．それぞれ対応する点にダッシュをつけている．このとき，C′ を表す複素数は $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ であるから，再び β をかけるという相似変換を行うと，$\gamma=\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ であることがわかる．

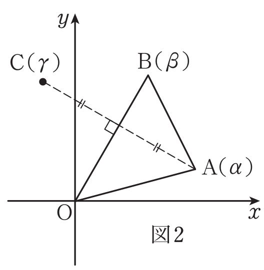

図2

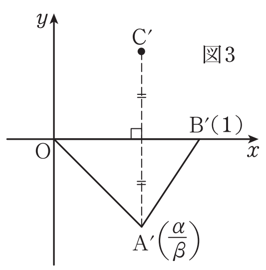

図3

（4）　（3）と同様に，D を表す複素数は $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha$ となるから，AB と DC が平行のとき

$$\frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta-\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\frac{\beta}{\alpha}-\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{\frac{\beta}{\alpha}-1}$$

は実数となる．ここで，$w=\frac{\beta}{\alpha}$ とおくと，$\frac{\frac{w}{\overline{w}}-\overline{w}}{w-1}$ が実数となることから

$$\frac{\frac{w}{\overline{w}}-\overline{w}}{w-1}=\overline{\left(\frac{\frac{w}{\overline{w}}-\overline{w}}{w-1}\right)}$$

$$\left(\frac{w}{\overline{w}}-\overline{w}\right)(\overline{w}-1)=\left(\frac{\overline{w}}{w}-w\right)(w-1)$$

$$-\frac{w}{\overline{w}}-\overline{w}^2=-\frac{\overline{w}}{w}-w^2$$

$$w^2-\overline{w}^2-\left(\frac{w}{\overline{w}}-\frac{\overline{w}}{w}\right)=0$$

$$w^2-\overline{w}^2-\frac{1}{|w|^2}(w^2-\overline{w}^2)=0$$

$$(w+\overline{w})(w-\overline{w})\left(1-\frac{1}{|w|^2}\right)=0$$

ここで，3点 O，A，B は同一直線上にないから，$w=\frac{\beta}{\alpha}$ は実数ではなく，$w\neq\overline{w}$ であるから

$w+\overline{w}=0$ または $|w|=1$

$w=\frac{\beta}{\alpha}$ が純虚数または $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=1$

$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$ または $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ となるから，辺 AB と直線 DC が平行なとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ は $\boldsymbol{\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}}$ **の直角三角形，または，OA ＝ OB の二等辺三角形**である．

3 数学Ⅲ【無限級数】標準

考え方　（4）の「帰納法で示せ」という指示の意図が伝わりにくい誘導は一旦無視して直接示す．

▶解答◀　（1）　$\frac{(k-1)!}{(k+1)!}=\frac{1}{k(k+1)}$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

であるから，

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\begin{array}{l}\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\\ \cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\\ \cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\\ \quad\vdots\\ \cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\end{array}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_1 = \mathbf{1}$ である．

(2)　$\dfrac{(k-1)!}{(k+2)!} = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

であるから，

$$S_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1\cdot 2} - \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} \\ \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 4}} \\ \cancel{\frac{1}{3\cdot 4}} - \cancel{\frac{1}{5\cdot 6}} \\ \quad\vdots \\ \cancel{\frac{1}{n(n+1)}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{array}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_2 = \mathbf{\frac{1}{4}}$ である．

(3)　$\dfrac{(k-1)!}{(k+3)!} = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

ここで，$f(k) = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ とおくと

$$\frac{(k-1)!}{(k+3)!} = \frac{1}{3}(f(k) - f(k+1))$$

であるから，

$$S_3 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(f(k) - f(k+1))$$

$$= \frac{1}{3}(f(1) - f(n+1))$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$\begin{array}{l} f(1) - \cancel{f(2)} \\ \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)} \\ \cancel{f(3)} - \cancel{f(4)} \\ \quad\vdots \\ \cancel{f(n)} - f(n+1) \end{array}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_3 = \mathbf{\frac{1}{18}}$ である．

(4)　$\dfrac{(k-1)!}{(k+p)!} = \dfrac{1}{k(k+1)\cdot\cdots\cdot(k+p)}$

ここで，$g(k) = \dfrac{1}{k(k+1)\cdot\cdots\cdot(k+p-1)}$ とおく．

$$\frac{(k-1)!}{(k+p)!} = \frac{1}{p}(g(k) - g(k+1))$$

$$\begin{array}{l} g(1) - \cancel{g(2)} \\ \cancel{g(2)} - \cancel{g(3)} \\ \cancel{g(3)} - \cancel{g(4)} \\ \quad\vdots \\ \cancel{g(n)} - g(n+1) \end{array}$$

$$S_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}(g(k) - g(k+1))$$

$$= \frac{1}{p}(g(1) - g(n+1))$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+p)}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right)}$$

注意　**【帰納法を使えというなら】**

本問で与えられている S_p には p と n という添字が2つあり，どちらに対する帰納法を使うのか，それとも二重帰納法を使えということなのか指示されていない．そもそも S_p ではなく $S_p(n)$ などとするのが親切心というものだろう．大体，(1) から (3) の流れから推測したら誰もが p についての帰納法だと考えるに違いない．しかし，p についての帰納法は意味がない．無理やり帰納法を使うなら n についての帰納法を行うしかない．これじゃあ (1) から (3) の意味がないじゃないか！

$$S_p(n) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right)$$

と推測できる．これを n についての数学的帰納法で証明する．$n=1$ のとき，すべての自然数 p に対して

$$S_p(1) = \frac{1}{(p+1)!} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(p+1)!}\right)$$

となるから成立している．

すべての自然数 p に対して $n=l$ で成立しているとする．

$$S_p(l) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{l!}{(l+p)!}\right)$$

である．このとき

$$S_p(l+1) = S_p(l) + \frac{l!}{(l+1+p)!}$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{l!}{(l+p)!}\right) + \frac{l!}{(l+1+p)!}$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{l+1+p}{l+1}\cdot\frac{(l+1)!}{(l+p+1)!}\right)$$

$$+ \frac{1}{l+1}\cdot\frac{(l+1)!}{(l+1+p)!}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\frac{1}{p!} - \frac{(l+1)!}{(l+1+p)!}\left(\frac{l+1+p}{l+1} - \frac{p}{l+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{(l+1)!}{(l+1+p)!}\right)$$

となるから，$n=l+1$ でも成立する．

要の分析　標準的な問題が続く．**2**(3) は傍用問題集にもあるが，記憶の彼方にいってしまっている生徒も多いだろう．**3**(4) は下手な誘導がついているから注意したい．

（塩崎，松岡，安田亨）