愛知医科大学・医学部

試験日　2023年1月24日　時間80分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1　（1）（ i ）$y=\dfrac{\log x}{x}$ を微分せよ．

（ii）定積分 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\,dx$ を求めよ．

（iii）$\sin\dfrac{\pi}{24}+\sin\dfrac{7}{24}\pi$ を求めよ．

（2）正 n 角形の頂点を $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n$ とする．頂点のうち3点を結んで三角形を作るとき，次の問いに答えよ．ただし，n は4以上の偶数とする．

（ i ）直角三角形は何個作れるか．

（ii）鈍角三角形は何個作れるか．

（iii）鋭角三角形は何個作れるか．

（3）次の数列について，以下の問いに答えよ．

$$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \cdots$$

（ i ）最初に出てくる $\dfrac{5}{8}$ は第何項になるか．

（ii）第200項を求めよ．

（iii）初項から第200項までの和を求めよ．

2　m を実数とする．2直線 $l_1: mx-y=0,\ l_2: x+my-2m-1=0$ の交点Pの描く図形を C とする．図形 C と l_1 とのP以外の交点を Q_1，図形 C と l_2 とのP以外の交点を Q_2 とするとき，次の問いに答えよ．

（1）点Pの軌跡を求め，座標平面に図形 C を図示せよ．

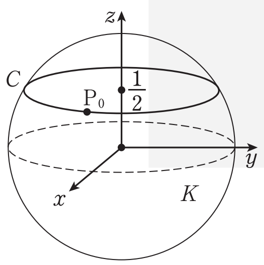
（2）$\mathrm{PQ}_1+\mathrm{PQ}_2$ の最大値とそのときの m の値を求めよ．

3　原点を中心とする半径1の球面 K が，平面 $z=\dfrac{1}{2}$ と交わってできる円を C とする．半径1の円板 L が，L の中心Pで K と接しているとき，次の問いに答えよ．

（1）点Pは円 C 上の点 $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ にあるとして，円板 L 上の任意の点の z 座標 t のとり得る値の範囲を求めよ．

（2）t は（1）で得られた値をとるとし，平面 $z=t$ と円板 L の共通部分を M とする．M 上の点で z 軸に一番近い点と z 軸との距離を d_1 とするとき，d_1 を t で表せ．

（3）点Pが P_0 から出発して円 C 上を1周するとき，円板 L が通過してできる立体の体積 V を求めよ．



1　（1）（ i ）数学Ⅲ【導関数】基本

▶解答◀　$y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}$

$=\dfrac{\mathbf{1-\log x}}{\boldsymbol{x^2}}$

（ii）数学Ⅲ【定積分】標準

▶解答◀　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\pi(\sqrt{2})^2}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi}$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$ は半径 $\sqrt{2}$ の四分円の面積である．

（iii）数学Ⅱ【加法定理とその応用】標準

▶解答◀　$\sin\dfrac{\pi}{24}+\sin\dfrac{7}{24}\pi$

$$=\sin\frac{4-3}{24}\pi+\sin\frac{4+3}{24}\pi$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\dfrac{\pi}{8}>0$ であるから，求める値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

（２）　数学A【場合の数】標準

▶解答◀　正 n 角形を $A_1A_2\cdots A_n$ とし，外接円とともに描く．n は 4 以上の偶数である．

（ｉ）　図 1 を見よ．直径を選び（$\dfrac{n}{2}$ 本ある．正確には直径の両端の頂点を選ぶ)，残る頂点 $n-2$ 個のうちの 1 個を選ぶと考え，直角三角形の個数は

$$\frac{n}{2}(n-2)=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-2)}$$

図 1

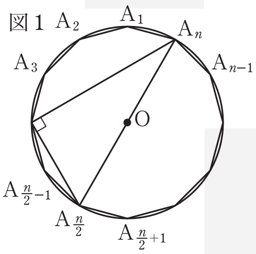
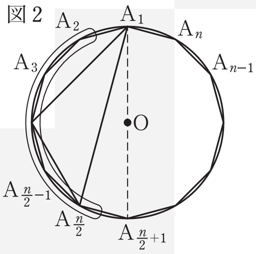


図 2



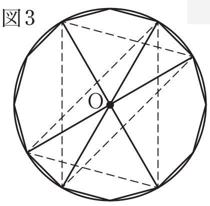
（ii）　1 頂点を決め（n 通り，図 2 の場合は点 A_1)，それから左まわりに半周未満する間の弧にある頂点（$\dfrac{n}{2}-1$ 個ある）から 2 点を選ぶと考え，鈍角三角形の個数は

$$n\cdot{}_{\frac{n}{2}-1}C_2=n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}n(n-2)(n-4)}$$

この場合，鈍角三角形とは外接円の中心 O が三角形の外部にある三角形と捉える．

図 3



（iii）　図 3 を参照せよ．直径が $\dfrac{n}{2}$ 本ある．ここから 3 本選び，その端を 1 つおきに結ぶと鋭角三角形が 2 つ出来る．鋭角三角形の個数は

$$2\cdot{}_{\frac{n}{2}}C_3=\frac{\frac{n}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-2)(n-4)}$$

この場合，鋭角三角形とは外接円の中心 O が三角形の内部にある三角形と捉える．ただし，この解法は頂点の個数が偶数でないと使えない．

注意　**【全体から引く】**

三角形の総数は ${}_nC_3=\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ であるから，鋭角三角形の個数は

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}n(n-2)$$

$$-\frac{1}{8}n(n-2)(n-4)$$

$$=\frac{1}{24}n(n-2)\{4(n-1)-12-3(n-4)\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-2)(n-4)}$$

この方針だと n が奇数のときにも使える．

（３）　数学B【群数列】標準

▶解答◀　第 k 群に k 個の項があるように群に分ける．第 k 群は，約分せずに分母を k とすれば，分子は自然数を 1 から k まで順に並べたものになっている．

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \cdots$$

第 k 群の最後までの個数は

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

である．

（ｉ）　最初に出てくる $\dfrac{5}{8}$ は第 8 群の 5 項目であるから

$$\frac{1}{2}\cdot7\cdot8+5=33$$

よって，**第 33 項**である．

（ii）　第 200 項が第 n 群にあるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<200\leqq\frac{1}{2}n(n+1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす．$\dfrac{1}{2}n^2\fallingdotseq200$ としてみると，$n\fallingdotseq20$ である．① で $n=20$ としてみると，$190<200\leqq210$ で成り立つ．よって，第 200 項は第 20 群の $200-190=10$ 項目であるから，その値は $\dfrac{10}{20}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

（iii）　第 k 群の総和は

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\cdots+\frac{k}{k}=\frac{1}{k}(1+2+\cdots+k)$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)$$

初項から第 200 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{19}\frac{1}{2}(k+1)+\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\cdots+\frac{10}{20}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot19\cdot20+19\right)+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11$$

$$=\frac{209}{2}+\frac{11}{4}=\boldsymbol{\frac{429}{4}}$$

2

数学Ⅱ【三角関数の図形への応用】標準

▶解答◀　（１）　$mx-y=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$

$$x+my-2m-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$x \neq 0$ のとき，① より

$$m=\frac{y}{x}$$

② に代入して

$$x+\frac{y}{x}\cdot y-2\cdot\frac{y}{x}-1=0$$

$$x^2+y^2-2y-x=0$$

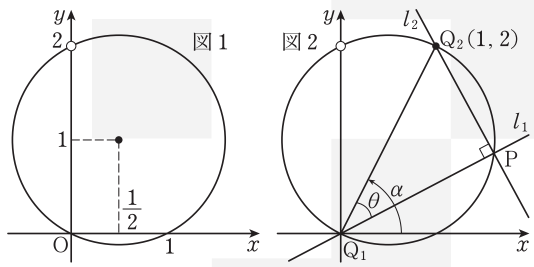
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

$x=0$ のとき，① より $y=0$

② に代入すると $-2m-1=0$　　$\therefore\ m=-\frac{1}{2}$

よって，P の軌跡は $\left(\frac{1}{2},1\right)$ **を中心とする半径** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **の円である．ただし，$(0,2)$ を除く．**

C を図示すると図 1 の通りである．



（**2**）② より $m(y-2)+x-1=0$

l_1 は $(0,0)$ を通り，l_2 は $(1,2)$ を通り，2 直線は直交する．よって，Q_1, Q_2 の座標はそれぞれ $(0,0)$, $(1,2)$ であり，線分 Q_1Q_2 は C の直径である．

$\angle Q_2Q_1P=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$Q_1Q_2=\sqrt{5}$ であるから

$$PQ_1+PQ_2=\sqrt{5}\cos\theta+\sqrt{5}\sin\theta$$

$$=\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$ であるから，PQ_1+PQ_2 は

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{10}}$ をとる．

l_1 の傾きが m である．直線 Q_1Q_2 が x 軸の正方向となす角を α とすると $\tan\alpha=2$ である．以下，複号同順である．

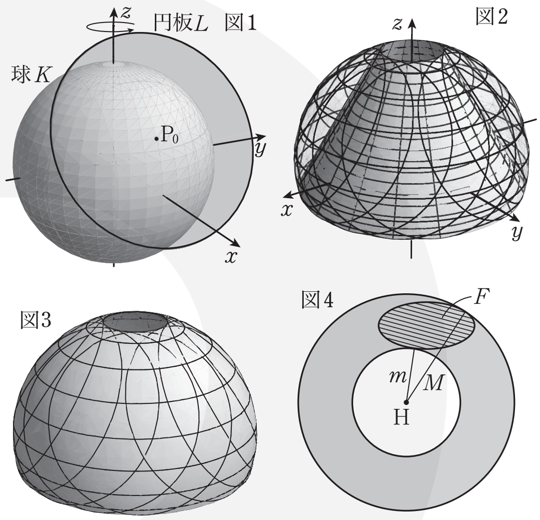
$$m=\tan\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\frac{\pi}{4}}{1\mp\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2\pm1}{1\mp2\cdot1}=\boldsymbol{-3,\ \frac{1}{3}}$$

3

数学Ⅲ【体積】標 準

考え方　本問には歴史がある．1966 年の夏のある日，受験雑誌「大学への数学」の社長である黒木正憲先生は，東急東横線に乗っていた．エアコンなどない時代である．電車の天井には扇風機が設置され，混雑する車内に，生暖かい風ではあるが，一服の涼をもたらしていた．数学の問題を作ることが趣味の人間には，見る物すべてが数学に見える．「あの扇風機の通過する立体の体積は，なんですかね」と呟いた．同乗していた編集長の山本矩一郎先生は紙と鉛筆を取り出して計算を始めた．そして，受験雑誌「大学への数学」の 1966 年 9 月号の学力コンテストに出題された．私は，1966 年には中学生である．1971 年に発売された「新作問題演習 NO3」でその問題を見た．これはその後，多くの大学に多くの類題を生み出すことになる．なお，扇風機の動きは複雑だから，それをヒントにした問題ということである．



できあがる立体は次のようになる．円板 L の周は球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 上にあるから，回転したとき，L の通過する部分は球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 2$ の一部をなす．また，円板 L と，xz 平面の交線は線分をなし，回転したとき，その通過する部分は円錐台の側面をなす．図 2 を見よ．円錐台が見えるように，外の球は描かず，多くの円を描いた．図 3 を見よ．これは外の球面を描いてある．

本問では，体積を求める上手い方法は，ある．しかし，定石は次のようにする．回転する前のもの（今は円板 L）を回転軸に垂直に切る．回転軸との交点を H とする．円板 L と断面との交線を F とする．今は F は線分である．H と F との最短距離を m，最長距離を M とする．F を回転したときにできる図形の面積を S とすると $S=\pi(M^2-m^2)$ である．

解答では図番号を 1 から振り直す．

円板 L は，球面（解答の ①，P_0 を中心，半径 1 の球）と，平面 ②（解答の図 1 にある線分 AB を直線だと思っ

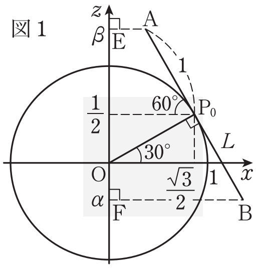
て式にする）の交線としてとらえる．

そして，これらを平面 $z=t$ で切るが，$z=t$ で切ったときの断面上の点 $(x,\,y,\,z)$ については $x=\dfrac{2-t}{\sqrt{3}}$ と定まるから，x を消去して，実数 y の存在性を調べればよい．

実はこうした平面図形を回転した立体の求積は大昔の有名問題で，yz 平面に正射影（垂直に影をおとす）した図形（回転軸に垂直に切った断面と平行な平面で回転軸を含む平面，今は yz 平面に正射影する）の回転体に等積変形できる．

▶解答◀　図 1 は L を y 軸の負の方向から見たものである．

図 1



（**1**）　円板 L は

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqq 1 \quad\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

かつ $z=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$ ……………………②

と表される．② より $x=\dfrac{2-z}{\sqrt{3}}$ となるからこれを ① に代入し

$$\left(\frac{2-z}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqq 1$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-z\right)^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqq 1$$

$$\frac{4}{3}\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq 1 \quad\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

ここで $z=t$ とおく．

$$0\leqq y^2\leqq 1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{3}{4}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq t-\frac{1}{2}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

（**2**）　図 2 を見よ．点の説明は（ 3 ）で出てくる．

$$d_1=\mathrm{HN}=\boldsymbol{\frac{2-t}{\sqrt{3}}}$$

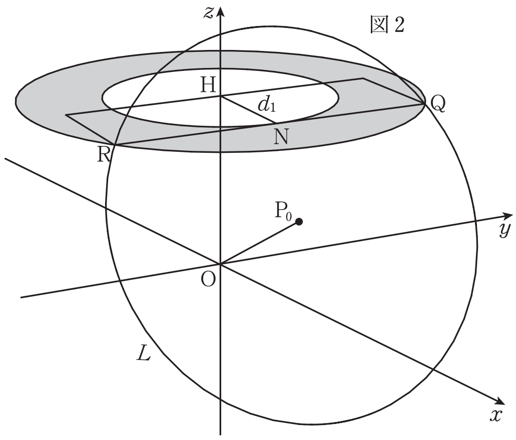
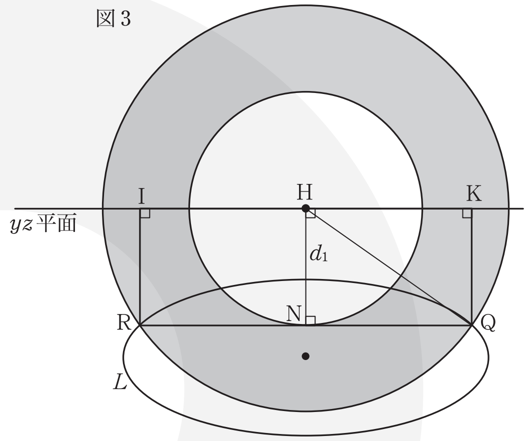


図 2

図 3



（**3**）　線分 M の両端を Q，R，QR の中点を N とする．Q，R から yz 平面に下ろした垂線の足を K，I とする．

③ で $|y|\leqq\sqrt{1-\dfrac{4}{3}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ となるから

$\sqrt{1-\dfrac{4}{3}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2}=u$ とおくと $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2-t}{\sqrt{3}},\,u,\,t\right)$，

$\mathrm{R}\left(\dfrac{2-t}{\sqrt{3}},\,-u,\,t\right)$，$\mathrm{N}\left(\dfrac{2-t}{\sqrt{3}},\,0,\,t\right)$ となる．

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ とおく．

$\mathrm{H}(0,\,0,\,t)$ として線分 QR を z 軸のまわりに回転したドーナツ板の面積 S は

$$S=\pi(\mathrm{HQ}^2-\mathrm{HN}^2)=\pi\mathrm{QN}^2=\pi u^2$$

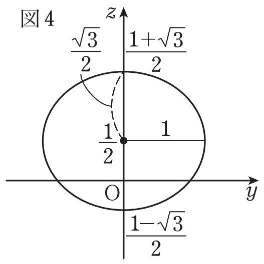
$$=\pi\left\{1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right\}=-\frac{4\pi}{3}(t-\alpha)(t-\beta)$$

$$V=\int_\alpha^\beta S\,dt=\frac{\frac{4\pi}{3}}{6}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi}$$

注意　**1°【正射影して等積変形する】**

$S=\pi\mathrm{QN}^2=\pi\mathrm{HK}^2$ になる．このことは円板 L を yz 平面に射影して考えても体積は変わらないことを示している．

図 4



円板 L を yz 平面に射影して得られる図形は楕円③で図 4 のようになる．これを z 軸のまわりに回転してできる立体（楕円体）の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

（半径 1 の球を z 軸方向に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍に縮めると考える）

2°【出来上がる立体についての補足】

図 5 を見よ．OA $=\sqrt{2}$ であり，円板 L の周上の点は，球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 上にある．題意の立体は図 5 の網目部分を z 軸の周りに回転したもので球 $x^2+y^2+z^2=2$ の一部と図 6 の円錐台にはさまれた部分となる．図 5 の網目部分（円 $x^2+z^2=2$ と直線 $x=\frac{2-z}{\sqrt{3}}$ で囲まれた部分）を回転した立体の体積を求める．

図 5

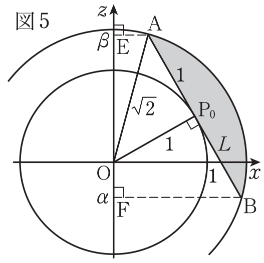
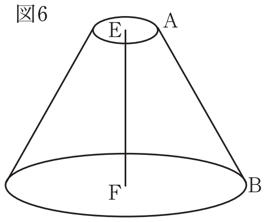


図6



$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left\{(2-z^2)-\left(\frac{2-z}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}dz$$

要の分析　**3** を除けば頻出タイプの問題が並んでいる．手際よく解き進め，**3** にじっくりと取り組みたい．

（野澤，中谷，中西，河野，鈴木伊，前田拓，安田亨）