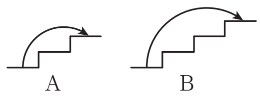
23-ACi-i_sui-kakunin : 2023/05/09 (11:30)

愛知医科大学・医学部-推薦

試験日　2022 年 11 月 26 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

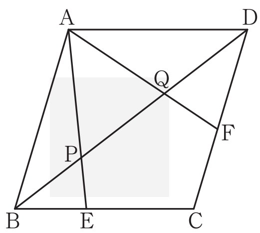
1　座標空間上の 2 点 A$(4,\,-2,\,-4)$, B$(-1,\,3,\,1)$ からの距離の比が 3 : 2 である点 P が描く図形を求めよ．

2　24 段の階段を昇るのに，2 段昇り（図 A）と 3 段昇り（図 B）をそれぞれ 1 回以上組み合わせて昇ることとする．このとき，この階段の昇り方は何通りあるか．ただし，3 段昇りが連続することはないものとする．



3　関数 $f(x)=\dfrac{bx}{x+a}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在し，$f^{-1}(x)$ が $f(x)$ と一致するための，定数 $a,\,b$ がみたすべき条件を求めよ．

4　下の平行四辺形 ABCD において，BC を 2 : 3 に内分する点を E，CD を 4 : 5 に内分する点を F とし，AE と BD，AF と BD の交点をそれぞれ P，Q とする．BD = 6 のとき，PQ の長さを求めよ．



5　x^{2023} を $x^2-\sqrt{3}x+1$ で割った余りを求めよ．

6　数列

$$\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\ \frac{3}{2\cdot3\cdot4\cdot5},\ \cdots,\ \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)},\ \cdots$$

の初項から第 n 項までの和を求めよ．

1

数学B【球面の方程式】基本

▶解答◀　P の座標を $(x,\,y,\,z)$ とおく．

AP : BP = 3 : 2 であるから 3BP = 2AP

$$9\text{BP}^2=4\text{AP}^2$$

$$9\{(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2\}$$

$$=4\{(x-4)^2+(y+2)^2+(z+4)^2\}$$

$$5x^2+50x+5y^2-70y+5z^2-50z-45=0$$

$$x^2+10x+y^2-14y+z^2-10z-9=0$$

$$(x+5)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=108$$

よって，P が描く図形は**中心が $(-5,\,7,\,5)$，半径 $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$ の球**である．

2

数学A【場合の数】標準

▶解答◀　2 段昇りを A, 3 段昇りを B とし，$A,\,B$ の回数をそれぞれ $a,\,b$（$a,\,b$ は 1 以上）とする．A を a 個，B を b 個並べる順列を考える．ただし，B は隣り合わない．

$2a+3b=24$ となるとき $a+\dfrac{3}{2}b=12$ となるから b は偶数で $b=2,\,4,\,6$ のいずれかとなる．$(a,\,b)$ は $(9,\,2),\,(6,\,4),\,(3,\,6)$ である．

$(a,\,b)=(9,\,2)$ のとき，A を 9 個並べその間か両端（全部で 10 か所）のどの 2 か所に B を入れるかを考えて ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$ 通りある．

$\vee\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee$
$\ A\ A\ A\ A\ A\ A\ A\ A\ A$

$(a,\,b)=(6,\,4)$ のとき，A を 6 個並べその間か両端（全部で 7 か所）のどの 4 か所に B を入れるかを考えて ${}_7\mathrm{C}_4=35$ 通りある．

$(a,\,b)=(3,\,6)$ のとき，B が隣り合わない順列は存在しない．

以上から，求める $A,\,B$ の列は $45+35=$ **80** 通りある．

◆別解◆　最初はすべて 2 段で昇ってもよいとする．以下では 3 段が連続するものはカウントされない．たとえば $6=2+2+2,\ 7=2+2+3$ のように和が n になる 2, 3 の列の個数を $f(n)$ とする．

$$n=2+(n-2)$$

$$n=3+2+(n-5)$$

であるから，和が n になるのは左端が 2 でその右の和が

$n-2$（$f(n-2)$ 通りある）か，左端が 3，その右が 2，その右の和が $n-5$ になる（$f(n-5)$ 通りある）ときで

$$f(n)=f(n-2)+f(n-5)$$

$$2=2,\ 3=3,\ 4=2+2,$$

$$5=2+3,\ 5=3+2,\ 6=2+2+2$$

$$f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=1,$$

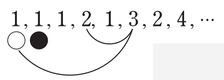
$$f(5)=2,\ f(6)=1$$

以下は $f(7)=f(2)+f(5)=3$ のように計算する．

$$f(n):1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 4,\ 5,\ 7,\ 7,\ 11,\ 11,$$
$$16,\ 18,\ 23,\ 29,\ 34,\ 45,\ 52,\ 68,\ 81,\ \cdots$$

となる．$n=24$ のときは，すべて 2 の列が 1 通りあるから，これを除いて **80** 通りある．

注意　最初は左端 $f(2)=1$（○白丸）に左指をおく．$f(6)=1$ の 1 つ左の 2 と，指をおいた 1 を加えるとして，$2+1=3$ を書く．次は左指を 1 つ右の 1（●黒丸）にずらし，3 の直前の 1 とこれを加えて $1+1=2$ とする．3 の右に 2 を書く．このようにしていけば $n=24$ まで来ることはやさしい．



3　数学III【逆関数・合成関数】標準

▶解答◀　$y=\dfrac{bx}{x+a}$ とおいて，x について解く．

$$(x+a)y=bx$$

$$(y-b)x=-ay \quad \cdots\cdots①$$

x が唯一に定まるのは $y\neq b$ のときであり（もし $y=b$ が値域内にあれば，それに対応する x がない [注を見よ．解なし，不能] か，x が何であってもよい [不定，x に何を代入しても $y=b$ になるのでは，逆関数の定義に反する．x は唯一に定まるのでなければならない] から $y=b$ は値域にない．）

$$x=\frac{-ay}{y-b}$$

$a=0$ とすると $x=0$ となり，x が 1 つの値しか取れなくなるから不適である．よって，$a\neq0$ である．

このとき x と y をとりかえて

$$y=\frac{-ax}{x-b}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-ax}{x-b}$$

$f^{-1}(x)$ が $f(x)$ と一致するための条件は

$$\frac{bx}{x+a}=\frac{-ax}{x-b} \quad \cdots\cdots②$$

の両辺の定義域が一致し，かつ，定義域内の任意の x に対して成り立つことである．$f(x)$ の定義域 $x\neq-a$ と $f^{-1}(x)$ の定義域 $x\neq b$ が一致することが必要で $b=-a$ となり，このとき ② の両辺の分子と分母は同じ式になり成り立つ．

以上から求める条件は $\boldsymbol{b=-a,\ a\neq0}$

注意　① で，$y-b=0$ かつ $-ay=0$ のとき（すなわち $-ab=0$ のとき）x が何でも成立し，唯一には定まらない．昔は不定（定まらず）といった．

$y-b=0$ かつ $-ay\neq0$ のとき ① は成立しない．昔は不能（解くことあたわず）といった．

4　数学A【図形の雑題】基本

▶解答◀　$\triangle\mathrm{APD}\backsim\triangle\mathrm{EPB}$ であり，相似比は $\mathrm{AD}:\mathrm{EB}=5:2$ であるから

$$\mathrm{PD}:\mathrm{PB}=5:2$$

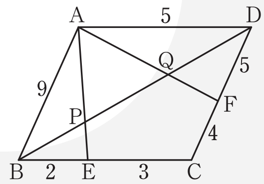
$$\mathrm{PD}=\frac{5}{5+2}\mathrm{BD}=\frac{5}{7}\cdot6=\frac{30}{7}$$

$\triangle\mathrm{ABQ}\backsim\triangle\mathrm{FDQ}$ であり，相似比は $\mathrm{AB}:\mathrm{FD}=9:5$ であるから

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{DQ}=9:5$$

$$\mathrm{DQ}=\frac{5}{9+5}\mathrm{BD}=\frac{5}{14}\cdot6=\frac{15}{7}$$

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{PD}-\mathrm{DQ}=\frac{30}{7}-\frac{15}{7}=\boldsymbol{\frac{15}{7}}$$



5　数学III【ド・モアブルの定理】標準

▶解答◀　x^{2023} を $x^2-\sqrt{3}x+1$ で割ったときの商を $P(x)$，余りを $ax+b$ とおく．a,b は実数である．

$$x^{2023}=(x^2-\sqrt{3}x+1)P(x)+ax+b \quad \cdots\cdots①$$

$x^2-\sqrt{3}x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ とおく．

$$\alpha^6=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$\alpha^{2023}=(\alpha^6)^{337}\cdot\alpha=-\alpha$$

① に $x=\alpha$ を代入すると

$$\alpha^{2023}=a\alpha+b$$

$$-\alpha=a\alpha+b$$

α は虚数であるから $a=-1,\ b=0$

求める余りは $\boldsymbol{-x}$

6

数学B【数列の雑題】標準

▶解答◀　$a_n=\dfrac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ とおくと

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}\\&=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}&-&\cancel{\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}}\\\cancel{\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}}&-&\cancel{\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}}\\\cancel{\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}}&-&\cancel{\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6}}\\&\vdots&\\\cancel{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}}&-&\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\end{array}$$

注意　無意味な計算であるが，通分を好む人もいるだろう．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{6(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\frac{n^3+6n^2+11n+6-6}{6(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\frac{n(n^2+6n+11)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

要の分析　基本から標準レベルの問題が並んでいる．試験時間が 60 分であるから，ミスのないように，落ち着いて解き進めたい．

（野澤，中谷，田中博，鈴木伊，前田拓，安田亨）