金沢医科大学・医学部-後期

試験日　2023 年 3 月 1 日　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 1 から 8 までのそれぞれの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ，合計 8 枚入った箱がある．この箱からカードを同時に 2 枚取り出す操作を n 回 $(n=1, 2, 3)$ 行ったときに，箱に残っているカードに書かれている整数の最大値を M_n，最小値を m_n とする．ただし，取り出したカードはもとに戻さないものとする．

（1） $m_1=2$ になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） $m_2=3$ になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（3） $M_2-m_2=6$ になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（4） $M_3=3$ になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

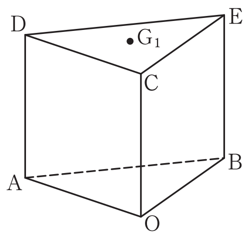
2 $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする．関数 $y=\cos 3\theta+\dfrac{3}{2}\cos 2\theta-3\cos\theta+\dfrac{5}{2}$ ……………… ① は

$y=\square\cos^3\theta+\square\cos^2\theta-\square\cos\theta+\square$

と変形できる．よって，① は $\theta=\square^\circ$ のとき最大値 $\square$ をとり，$\theta=\square^\circ$, $\square^\circ$ のとき最小値 $-\dfrac{\square}{\square}$ をとる．次に，a を定数とする．$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，方程式 $2\cos 3\theta+3\cos 2\theta-6\cos\theta-a=0$ は最大で $\square$ 個の異なる解をもち，このときの a のとり得る値の範囲は $-\dfrac{\square}{\square}<a<-\square$ である．

3 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n-3n^2(n+1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える．
$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと，$b_1=\square$，$b_2=-\square$，$b_{n+1}=\square b_n-\square n$ である．さらに，$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと，$c_1=-\square$，$c_n=\square-\square\cdot\square^{n-1}$ である．以上により，$a_n=n\left(\square n+\square-\square\cdot\square^{n-1}\right)$ である．

4 図のような，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{DCE}=120^\circ$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=\mathrm{OC}=2$ である三角柱 OAB-CDE がある．ただし，平面 OAB と平面 CDE は平行であり，辺 OC はどちらの平面とも垂直である．△CDE の重心を $\mathrm{G_1}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\square\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\square}$ であり，$\triangle\mathrm{G_1AB}$ の面積は $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ である．次に，$\triangle\mathrm{G_1AB}$ の重心を $\mathrm{G_2}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}=\dfrac{\square\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\square\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\square\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\square}$ であり，$\mathrm{OG_2}$ の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ である．さらに，直線 $\mathrm{OG_2}$ と平面 ABED の交点を K とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{\square}{\square}\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}$ である．また，四面体 OABK の体積は $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ である．



1

数学A【確率の雑題】標準

▶解答◀　(1)　$m_1=2$ になるのは，1回目に $\{1, 3\}$ (1のカードと3のカードの意味)，$\{1, 4\}$，$\{1, 5\}$，$\{1, 6\}$，$\{1, 7\}$，$\{1, 8\}$ を取り出すときで，求める確率は $\dfrac{6}{{}_8\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{14}}$

(2)　m_2 ということは取り出すカードが4枚，残るカードが4枚である．残る4枚のカードの組合せは全部で ${}_8\mathrm{C}_4=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=7\cdot2\cdot5$ 通りあり，その最小値が3になるのは，3と，4〜8のうちの3枚が残るときで，その組合せは ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通りある．求める確率は $\dfrac{10}{7\cdot2\cdot5}=\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

(3)　$M_2-m_2=6$ のとき $(m_2, M_2)=(1, 7), (2, 8)$ のいずれかである．$(m_2, M_2)=(1, 7)$ のとき1，7と，2〜6のうちの2枚が残るときで ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 通りある．$(m_2, M_2)=(2, 8)$ のときも同様である．求める確率は $\dfrac{10}{7\cdot2\cdot5}\cdot2=\boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$

(4)　M_3 ということは取り出すカードが6枚，残るカードが2枚である．その組合せは全部で ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=4\cdot7$ 通りある．$M_3=3$ になるのは3と1，または3と2が残るときで，求める確率は $\dfrac{2}{4\cdot7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{14}}$

2

数学II【最大値・最小値】標準

▶解答◀　$\cos\theta=c$ とおく．$-1\leqq c\leqq 1$

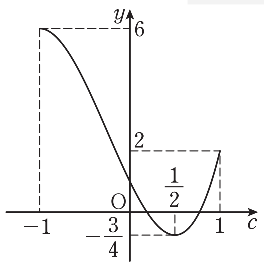
$$y=\cos3\theta+\frac{3}{2}\cos2\theta-3\cos\theta+\frac{5}{2}\quad\cdots\cdots①$$
$$=4c^3-3c+\frac{3}{2}(2c^2-1)-3c+\frac{5}{2}$$
$$=\boldsymbol{4c^3+3c^2-6c+1}\quad\cdots\cdots②$$

$f(c)=4c^3+3c^2-6c+1$ とおく．$-1\leqq c\leqq 1$ である．

$$f'(c)=12c^2+6c-6=6(2c-1)(c+1)$$

$f(-1)=6,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4},\ f(1)=2$

$f(c)$ の最大値は **6** で，それは $c=-1$ すなわち $\theta=\mathbf{180}^\circ$ のときにとる．$f(c)$ の最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$ で，それは $c=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=\mathbf{60}^\circ, \mathbf{300}^\circ$ のときにとる．



$$2\cos3\theta+3\cos2\theta-6\cos\theta-a=0\quad\cdots\cdots③$$
$$\cos3\theta+\frac{3}{2}\cos2\theta-3\cos\theta=\frac{a}{2}$$
$$4c^3+3c^2-6c+1=\frac{a+5}{2}$$

図は②のグラフである．$c=\pm1$ に対応する θ は1つで，$-1<c<1$ の c には2つの θ が対応するから，方程式③は最大で **4** 個の解をもち，このとき a のとり得る値の範囲は

$$-\frac{3}{4}<\frac{a+5}{2}<2\qquad\therefore\quad \boldsymbol{-\frac{13}{2}<a<-1}$$

3

数学B【漸化式】標準

▶解答◀　$na_{n+1}=2(n+1)a_n-3n^2(n+1)$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{2a_n}{n}-3n$$
$$b_{n+1}=\boldsymbol{2b_n-3n}\quad\cdots\cdots①$$
$$b_1=\frac{a_1}{1}=\mathbf{1}$$
$$b_2=2b_1-3=\mathbf{-1}$$

$b_{n+2}=2b_{n+1}-3(n+1)$ と①とで辺ごと引いて

$$b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)-3$$
$$c_{n+1}=2c_n-3$$
$$c_{n+1}-3=2(c_n-3)$$

数列 $\{c_n-3\}$ は等比数列である．$c_1=b_2-b_1=\mathbf{-2}$

$$c_n-3=(c_1-3)\cdot2^{n-1}$$
$$c_n=\boldsymbol{3-5\cdot2^{n-1}}$$

数列 $\{c_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列だから，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k$$
$$=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3-5\cdot2^{k-1})$$
$$=1+3(n-1)-5\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$$
$$=3n+3-5\cdot2^{n-1}$$
$$a_n=\boldsymbol{n(3n+3-5\cdot2^{n-1})}$$

結果は $n=1$ でも成り立つ．

4

数学B【ベクトルと図形（空間）】標準

▶解答◀　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{b}+\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}}{3}}$$

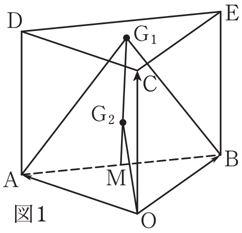


図1

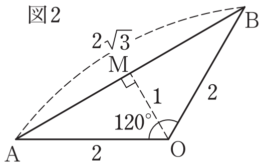


図2

辺 AB の中点を M とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{G_1M}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OG_1}}$$

$$= \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}}{3}$$

$$= \frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}-6\vec{c})$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{G_1M}}|^2 = \frac{1}{36}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+36|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$= \frac{1}{36}(4+4+144-4) = \frac{37}{9}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{G_1M}}| = \frac{\sqrt{37}}{3}$$

$\triangle \mathrm{G_1AB}$ は二等辺三角形であるから $\mathrm{G_1M} \perp \mathrm{AB}$ である．

$$\triangle \mathrm{G_1AB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{G_1M}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{37}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{111}}{3}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_2}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}}{3}+\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{4\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}}{9}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}|^2 = \frac{1}{81}(16|\vec{a}|^2+16|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2+32\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$= \frac{1}{81}(64+64+36-64) = \frac{100}{81}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}| = \boldsymbol{\frac{10}{9}}$$

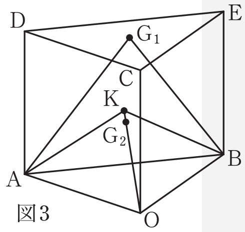


図3

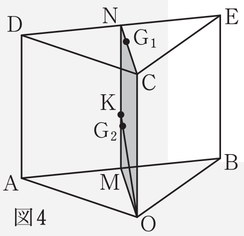


図4

$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}$ とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = k\cdot\frac{4\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}}{9} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

図 4 を見よ．三角柱 OAB-CDE を 3 点 O，C，M を通る平面で切ると切断面（図 4 の網目部分）は DE の中点 N を通る．$\mathrm{G_1}$ は平面 OCNM 上にあることが分かるから，$\mathrm{G_2}$，K も平面 OCNM 上にあることが順次確認出来る．さらに，$\mathrm{MK} \perp \mathrm{AB}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MK}} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + \overrightarrow{\mathrm{MK}} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MK}} \mathbin{/\!/} \vec{c}$ であるから ① と ② の $\vec{a}, \vec{b}$ の係数を比較して

$$\frac{4k}{9} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad k = \frac{9}{8}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \boldsymbol{\frac{9}{8}\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}} = \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}$$

$\triangle$OAB を四面体 OABK の底面としたときの高さは $\frac{3}{8}|\vec{c}| = \frac{3}{4}$ であるから，四面体 OABK の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

◆別解◆　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}$ とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \frac{k}{9}(4\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c})$$

$$= \frac{1}{9}(4k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3k(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}))$$

$$= \frac{k}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{4k}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3k}{9}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

K は平面 ABD 上にあるから

$$\frac{k}{9}+\frac{4k}{9}+\frac{3k}{9} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{9}{8}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \boldsymbol{\frac{9}{8}\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}}$$

要の分析　標準レベルの問題であるが，試験時間が短いわりに計算量は多い．

（坪内，茅嶋，KK，安田亨）