# 金沢医科大学・医学部-前期

試験日　2023 年 1 月 30 日 **1**〜**4**　31 日 **5**〜**8**　時間 60 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

**1**　3 個のさいころ A，B，C と 1 枚の硬貨を同時に投げるとき，さいころの出る目をそれぞれ $a, b, c$ とする．また，硬貨の表が出たとき，$k=1$ とし，硬貨の裏が出たとき，$k=2$ とする．これらの値に対して，式 $L=\log_{a+k} bc$ を考える．

（1）　$L$ の値が最大になるとき，$L$ を超えない最大の整数は $\square$ である．

（2）　$L$ の値が最小になるとき，$L=\square$ であり，このときの確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

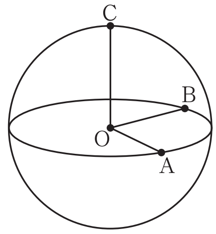
（3）　$L$ の値が自然数になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（4）　$L$ の値が 3 以上 4 以下になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（5）　$L$ の値が 0.5 を超える確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

**2**　$a$ を定数とする．直線 $y=x+a \cdots$ ① と円 $x^2+y^2=4 \cdots$ ② が異なる 2 点で交わり，この 2 点と原点 O を頂点とする三角形が正三角形であるとき，$a$ の値は $\pm\sqrt{\boxed{ア}}$ である．② と直線 $y=x+\sqrt{\boxed{ア}}$ の交点を A，B，② と直線 $y=x-\sqrt{\boxed{ア}}$ の交点を C，D とする．ただし，A の $x$ 座標は B の $x$ 座標より大きく，D の $x$ 座標は C の $x$ 座標より大きいとする．このとき，A の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{\square}-\sqrt{\square}}{\square}, \dfrac{\sqrt{\boxed{イ}}+\sqrt{\boxed{ウ}}}{\square}\right)$，AD の長さは $\square\sqrt{\square}$，四角形 ABCD の面積は $\square\sqrt{\square}$ である．ただし，$\boxed{イ}<\boxed{ウ}$ とする．次に，① と平行で $y$ 切片が正である直線が ② と接するとき，この直線の方程式は $y=x+\square\sqrt{\square} \cdots$ ③ である．さらに，③ と直線 OA，OB の交点をそれぞれ A′，B′ とするとき，△OA′B′ の面積は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

**3**　図のように，点 O を中心とする半径 1 の球面上に異なる 3 点 A，B，C があり，$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ はどの 2 つも互いに垂直であるとする．$s, t$ を正の定数とし，球面上の点 P，Q が $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ をみたすとき，$s=\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$，$t=\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ であり，$\cos\angle POQ$ の値は $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ である．また，点 C から平面 OPQ に垂線 CH を下ろすとき，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{\sqrt{\square}\overrightarrow{OA}+\square\sqrt{\square}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}{\square}$ であり，四面体 OCPQ の体積は $\dfrac{\square}{\square}$ である．



**4** 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ $(x \geqq 0)$ は $x = \square$ のとき，極大値 $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ をとる．また，曲線 $y = f(x)$ 上の $x = \sqrt[\square]{\square}$ における点は変曲点である．ここで，この変曲点における接線が $x$ 軸および $y$ 軸と交わる点をそれぞれ A，B とする．原点を O とするとき，△OAB の面積は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．次に，$a$ を正の定数とする．方程式 $\sqrt{x^4+1} = ax$ は $a > \sqrt{\square}$ のとき，異なる $\square$ 個の実数解をもつ．

**5** 1 から 6 までの数字がそれぞれ 1 面ずつに書かれたさいころがある．このさいころを 1 回投げるごとに，出た面をその数字に 1 を加えた数字に書きかえるものとする．例えば，6 が出たときはその面を 7 に書きかえる．このさいころを 3 回続けて投げたとき，以下の問いに答えよ．

（1） 書かれている数字が 6 種類である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） 同じ数字が 3 か所に書かれている確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（3） 書かれている数字が 3 種類である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（4） 2 が少なくとも 1 か所に書かれている確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

**6** 2 つの直線 $y = \dfrac{2}{3}x \cdots ①$, $y = -\dfrac{4}{3}x \cdots ②$ に接し，点 K(0, 1) を通る放物線の方程式は

$y = \dfrac{\square}{\square}x^2 - \dfrac{\square}{\square}x + \square \cdots ③$ である．① と ③ の接点を A，② と ③ の接点を B とするとき，

$A\left(\square, \dfrac{\square}{\square}\right)$, $B\left(-\square, \dfrac{\square}{\square}\right)$ である．また，K における ③ の接線の方程式は $y = -\dfrac{\square}{\square}x + 1 \cdots ④$ であり，原点を O，④ と ① の交点を A′，④ と ② の交点を B′ とするとき，△OA′B′ の面積は $\square$ である．

**7** 自然数 1, 2, 3, ⋯ を図のように配置する．

（1） 1 行目に現れる数列 1, 3, 4, 10, 11, ⋯ を順に $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots$ とするとき，$a_{15} = \square$, $a_{16} = \square$ である．

（2） 200 は $\square$ 行目の $\square$ 列目にある．

次に，$n$ 行目の $n$ 列目にある数を $b_n$ とする．すなわち，$b_1 = 1, b_2 = 5, b_3 = 13, \cdots$ とする．

（3） $b_n = \square n^2 - \square n + \square$ と表される．

（4） 1000 を超えない $b_n$ の最大値は $\boxed{ア}$ であり，$b_n = \boxed{ア}$ を満たす $n$ の値は $\square$ である．

| | 1 列 | 2 列 | 3 列 | 4 列 | 5 列 | 6 列 | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 行 | 1 | 3 | 4 | 10 | 11 | ⋯ | |
| 2 行 | 2 | 5 | 9 | 12 | ⋯ | | |
| 3 行 | 6 | 8 | 13 | ⋯ | | | |
| 4 行 | 7 | 14 | ⋯ | | | | |
| 5 行 | 15 | ⋯ | | | | | |
| 6 行 | 16 | | | | | | |
| ⋯ | | | | | | | |

**8** 楕円 $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ $(x \geqq 0) \cdots ①$ 上の点 P における ① の接線の傾きが $-1$ であるとき，P の座標は

$\left(\dfrac{\sqrt{\square}}{\square},\ \dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}\right)$ である．次に，$a, b$ を定数とする．放物線 $x+ay^2+b=0$ … ② が P を通り，P において ① と共通の接線をもつとき，$a=\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$, $b=-\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．このとき，① と ② で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\square}{\square}-\sqrt{\square}\pi$ である．

## 1 数学II【対数の計算】標 準

**▶解答◀** （1） $k=1, 2, 1\leqq a\leqq 6$, $1\leqq b\leqq 6, 1\leqq c\leqq 6$ であるから，$2\leqq a+k\leqq 8$, $1\leqq bc\leqq 36$ である．

$L=\dfrac{\log_{10}bc}{\log_{10}(a+k)}$ が最大になるのは，$a+k$ が最小で，$bc$ が最大になるときで，$a+k=2, bc=36$ のときである．このとき $L=\log_2 36$ で

$$2^5<36<2^6 \qquad \therefore\ 5<L<6$$

ガウス記号（小数部分の切り捨て）を用いて，$[L]=\mathbf{5}$ となる．

（2） $L\geqq 0$ であり，$L$ の最小値は $\mathbf{0}$ である．そのとき $bc=1$ であり，$(b, c)=(1, 1)$ であるから，求める確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$ である．

（3） $a+k$ の取り得る値，$bc$ の取り得る値は次のようになる．

表1

| $a$＼$k$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 6 |
| 5 | 6 | 7 |
| 6 | 7 | 8 |

表2

| $b$＼$c$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

$a+k=2$（確率 $\dfrac{1}{12}$）のとき，$L$ が整数となるのは，$bc=2, 4, 8, 16$ のときで，このときの $(b, c)$ は 8 通りあるから，確率は $\dfrac{8}{36}$ である．

$a+k=3$（確率 $\dfrac{2}{12}$）のとき，$L$ が整数となるのは，$bc=3, 9$ のときで，このときの $(b, c)$ は 3 通りあるから，確率は $\dfrac{3}{36}$ である．

$a+k=4$（確率 $\dfrac{2}{12}$）のとき，$L$ が整数となるのは，$bc=4, 16$ のときで，このときの $(b, c)$ は 4 通りあるから，確率は $\dfrac{4}{36}$ である．

$a+k=5$（確率 $\dfrac{2}{12}$）のとき，$L$ が整数となるのは，$bc=5, 25$ のときで，このときの $(b, c)$ は 3 通りあるから，確率は $\dfrac{3}{36}$ である．

$a+k=6$（確率 $\dfrac{2}{12}$）のとき，$L$ が整数となるのは，$bc=6, 36$ のときで，このときの $(b, c)$ は 5 通りあるから，確率は $\dfrac{5}{36}$ である．

$a+k=7$（確率 $\dfrac{2}{12}$）のとき，$L$ が整数となる $bc$ は存在しない．

$a+k=8$（確率 $\dfrac{1}{12}$）のとき，$L$ が整数となるのは，$bc=8$ のときで，このときの $(b, c)$ は 2 通りあるから，確率は $\dfrac{2}{36}$ である．

求める確率は

$$\frac{1}{12}\left(\frac{8}{36}+\frac{2}{36}\right)+\frac{2}{12}\left(\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}\right)$$
$$=\frac{10+30}{12\cdot 36}=\mathbf{\frac{5}{54}}$$

（4） $3\leqq L\leqq 4$ のとき

$$(a+k)^3\leqq bc\leqq (a+k)^4 \quad \cdots\cdots ①$$

$a+k\geqq 4$ のとき，$(a+k)^3\geqq 64$ であるから，$1\leqq bc\leqq 36$ に適さない．

$a+k=2$ のとき，① より $8\leqq bc\leqq 16$ であるから，$bc=8, 9, 10, 12, 15, 16$ で，このときの $(b, c)$ は 12 通りあるから，確率は $\dfrac{12}{36}$ である．

$a+k=3$ のとき，① より $27\leqq bc\leqq 81$ であるから，$bc=30, 36$ で，このときの $(b, c)$ は 3 通りあるから，確率は $\dfrac{3}{36}$ である．

求める確率は

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{36}+\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{36}=\frac{18}{12\cdot 36}=\mathbf{\frac{1}{24}}$$

（5） 余事象を考える．$L\leqq 0.5$ のとき

$$bc\leqq\sqrt{a+k}$$

$\sqrt{a+k}\leqq\sqrt{8}=2.82\cdots$ であるから，$bc=1, 2$ である．

$bc=1$（確率 $\dfrac{1}{36}$）のとき，$\sqrt{a+k}\geqq 1$ より $a+k\geqq 1$ であるから，常に成り立つ．

$bc=2$（確率 $\dfrac{2}{36}$）のとき，$\sqrt{a+k}\geqq 2$ より $a+k\geqq 4$ であるから，$a+k=4, 5, 6, 7, 8$ で，確率は $\dfrac{9}{12}$ である．

求める確率は

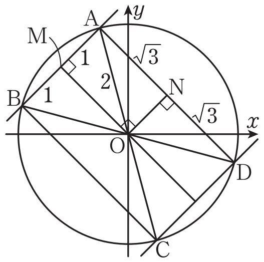
$$1-\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}\cdot\frac{9}{12}\right)=1-\frac{30}{36\cdot 12}=\mathbf{\frac{67}{72}}$$

## 2 数学Ⅱ【円と直線】標準

**▶解答◀**　①，② が異なる 2 点で交わり，これらと O で正三角形を作るとき，O と ① の距離は $\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}\qquad \therefore\quad a=\pm\boldsymbol{\sqrt{6}}$$

AB の中点を M，AD の中点を N とする．




$y=x+\sqrt{6}$ と ② を連立して

$$x^2+(x+\sqrt{6})^2=4$$

$$x^2+\sqrt{6}x+1=0$$

$$x=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ とおく．A の座標は $(\alpha,\ \alpha+\sqrt{6})$ であるから $\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}\right)$ である．

△OAB と △OCD は O について対称であるから，BD は ② の直径で，四角形 ABCD は長方形である．

$$\mathrm{AB}=\mathrm{OA}=2$$

であるから

$$\mathrm{AD}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

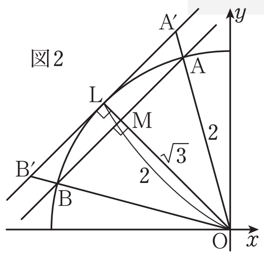
四角形 ABCD の面積は $2\cdot2\sqrt{3}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$ である．

直線 $y=x+b$ が ② と接するとき

$$\frac{|b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$$

で，$b>0$ より ③ は $y=x+\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ である．

図2




A′B′ の中点を L とする．OL ＝ 2 である．

$$\triangle\mathrm{OA'B'}=\triangle\mathrm{OAB}\left(\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OM}}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

## 3 数学B【ベクトルと図形（空間）】標準

**▶解答◀**　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1$ より

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=1$$

$$\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=1$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ であるから

$$s^2+\frac{1}{4}=1$$

$s>0$ より $s=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ である．

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=1$ より

$$\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=1$$

$$\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=1$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ であるから

$$t^2+\frac{1}{9}=1$$

$t>0$ より $t=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\frac{\sqrt{6}}{3}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

であるから

$$\cos\angle\mathrm{POQ}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

図1

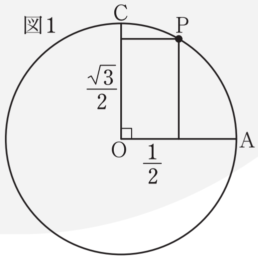
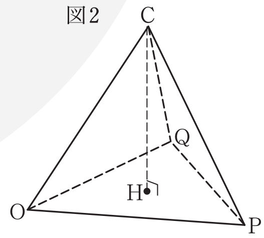



図2




H は平面 OPQ 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおく．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より，① を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p\overrightarrow{\mathrm{OP}} + q\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= p|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + q\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= p + \frac{\sqrt{6}}{3}q - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，① を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (p\overrightarrow{\mathrm{OP}} + q\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$= p\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + q|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}p + q - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

② より $p = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}q$ となり，③ に代入して

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}q\right) + q - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3}q - \frac{\sqrt{2}}{6} = 0 \qquad \therefore \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$p = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{1}{12}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\sqrt{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{12}}$$

となり

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \frac{1}{144}|\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\sqrt{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$= \frac{1}{144}(3|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 8|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)$$

$$= \frac{3+8+1}{144} = \frac{1}{12}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ である．① より

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

したがって，四面体 OCPQ の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OPQ}\cdot\mathrm{CH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

## 4　数学Ⅲ【微分と方程式】標 準

**▶解答◀**　$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^4+1} - x\cdot\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1}$$

$$= \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \left\{\frac{1-x^4}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}\right\}'$$

$$= \frac{1}{(x^4+1)^3}\Big\{-4x^3(x^4+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$-(1-x^4)\cdot\frac{3}{2}(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4x^3\Big\}$$

$$= \frac{-2x^3\{2(x^4+1)+3(1-x^4)\}}{(x^4+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{2x^3(x^4-5)}{(x^4+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$x \geqq 0$ で増減表は次のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt[4]{5}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↘ |

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = 0,\ f(0) = 0$$

である．$x = \mathbf{1}$ のとき，極大値 $f(1) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ をとる．変曲点の $x$ 座標は $x = \sqrt[4]{5}$ である．$\alpha = \sqrt[4]{5}$ とおく．

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{5+1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{6}}$$

$$f'(\alpha) = \frac{1-5}{(5+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4}{6\sqrt{6}} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$$

より，変曲点における接線は

$$y = -\frac{2}{3\sqrt{6}}(x-\alpha) + \frac{\alpha}{\sqrt{6}}$$

$$y = -\frac{2}{3\sqrt{6}}x + \frac{5\alpha}{3\sqrt{6}}$$

$y = 0$ のとき $x = \frac{5\alpha}{2}$ より，A の座標は $\left(\frac{5^{\frac{5}{4}}}{2}, 0\right)$，$x = 0$ のとき $y = \frac{5\alpha}{3\sqrt{6}}$ より B の座標は $\left(0, \frac{5^{\frac{5}{4}}}{3\sqrt{6}}\right)$ である．

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5^{\frac{5}{4}}}{2}\cdot\frac{5^{\frac{5}{4}}}{3\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{12\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{25\sqrt{30}}{72}}$$

また，$\sqrt{x^4+1} = ax$ のとき，$x = 0$ では成立しないから $x > 0$ であり，

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} = a$$

$g(t)=t+\dfrac{1}{t},\ t=x^2>0$ とおくと，

$g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$ で，$g(t)$ は $t=1$ で最小値 2 をとる．$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)=\infty,\ \lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$ より，$\sqrt{g(t)}=a$ は $\boldsymbol{a>\sqrt{2}}$ のとき，異なる **2** 個の実数解をもつ．

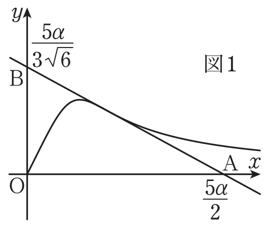


図1

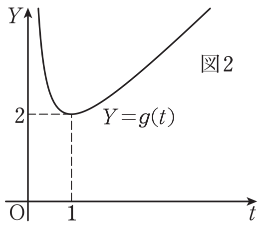


図2

## 5　数学A【確率の雑題】標準

**▶解答◀**　途中で目の数を変えると，記述がややこしくなる．たとえば最初に 4 の目が出れば，その面の数は 5 になるが，5 の面が 2 つになったからといって，「最初 4 だった面」が次に出る確率は $\dfrac{1}{6}$ のままで，変わらない．それなら，目の数を増やすのはサイコロを 3 回振り終えた後にまとめてやることにして，途中では目を書き変えないことにする．

これは，階段（9 段は必要だ）があり，1 段目から 6 段目まで，各段に 1 人ずつ，A，B，C，D，E，F さんが立っていて，各面に A，B，C，D，E，F と書いたサイコロを振り，毎回 1 人を 1 段上にあげるといってもよい．階段は横幅が広く，1 段に 6 人が並ぶこともできるとする．（1）は 3 回振って 6 人がバラバラに，異なる段に立っている確率を求めることになる．

（**1**）　題意に合う場合，1, 2, 3 は出てはいけない．毎回 4 か 5 か 6 が出る $3^3$ 通りのケースのすべてが適するわけではなく，このうちの次の場合が適する．

4 が 3 回出るとき（4 が最終的に 7 になる）か，5 が 3 回出るときか，6 が 3 回出るときか，4 と 5 と 6 が 1 回ずつ出る（3! 通り）ときか，4 が 2 回出てかつ 6 が 1 回出る（3 通り）か，5 が 2 回出てかつ 4 が 1 回出る（3 通り）か，6 が 2 回出てかつ 5 が 1 回出る（3 通り）ときである．求める確率は $\dfrac{3+3!+3\cdot 3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$ である．

（**2**）　階段で説明すれば，1 つの段に 3 人が並ぶという話である．そのためには，最初，その段以下に 3 人以上いないといけない．題意に合うのは次の場合である．

3 段目に 3 人が並ぶのは 1 が 2 回出てかつ 2 が 1 回出る（3 通り）とき，4 段目に 3 人が並ぶのは 2 が 2 回出てかつ 3 が 1 回出るとき，5 段目，6 段目についても同様で，求める確率は $\dfrac{3\cdot 4}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$ である．

（**3**）　2 段目，4 段目，6 段目に 2 人ずつ並ぶときしかない．1, 3, 5 が 1 回ずつ出る 3! 通りである．求める確率は $\dfrac{3!}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$ である．

（**4**）　2 が 1 回も出ない（$5^3$ 通り）とき，2 が 1 回，1 が 1 回，3〜6 のどれか（4 通り）が 1 回出る（4・3! 通り）とき，2 が 2 回，1 が 1 回出る（3 通り）ときがある．求める確率は $\dfrac{125+24+3}{6^3}=\dfrac{152}{216}=\boldsymbol{\dfrac{19}{27}}$ である．

## 6　数学Ⅱ【接線】標準

**▶解答◀**　放物線を $y=ax^2+bx+1$ とおき，A，B の $x$ 座標をそれぞれ $\alpha,\beta$ とする．

$y=ax^2+bx+1$ のとき，$y'=2ax+b$ であるから，$x=t$ における接線は

$$y=(2at+b)(x-t)+at^2+bt+1$$

$$y=(2at+b)x-at^2+1 \quad \cdots\cdots⑤$$

$t=\alpha,\beta$ を代入すると ①，② に一致するから

$$2a\alpha+b=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots⑥$$

$$-a\alpha^2+1=0 \quad \cdots\cdots⑦$$

$$2a\beta+b=-\frac{4}{3} \quad \cdots\cdots⑧$$

$$-a\beta^2+1=0 \quad \cdots\cdots⑨$$

⑦，⑨ より

$$a\alpha^2=a\beta^2$$

$a\neq 0,\ \alpha\neq\beta$ より $\beta=-\alpha$ で，⑧ に代入して

$$-2a\alpha+b=-\frac{4}{3}$$

⑥ と連立して

$$2b=-\frac{2}{3} \qquad \therefore\quad b=-\frac{1}{3}$$

⑥ に代入して

$$2a\alpha=1 \qquad \therefore\quad a\alpha=\frac{1}{2}$$

⑦ に代入して

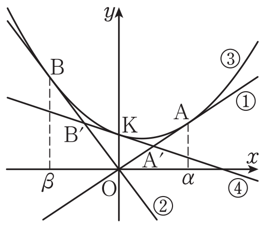
$$-\frac{\alpha}{2}+1=0 \qquad \therefore\quad \alpha=2$$

したがって $\beta=-\alpha=-2$ で，$a=\dfrac{1}{4}$ であるから，③ は $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{3}x+1}$ であり，①，② より，A の座標は $\left(\boldsymbol{2,\ \dfrac{4}{3}}\right)$，B の座標は $\left(\boldsymbol{-2,\ \dfrac{8}{3}}\right)$ となる．

⑤ の $t=0,\ a=\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{1}{3}$ を代入して，K における ③ の接線は $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{3}x+1}$ となる．

①，④ より $x=1,\ y=\dfrac{2}{3}$ であるから，A′ の座標は $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ である．②，④ より $x=-1,\ y=\dfrac{4}{3}$ であるから，B′ の座標は $\left(-1,\ \dfrac{4}{3}\right)$ である．したがって

$$\triangle\mathrm{OA'B'}=\frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{4}{3}-(-1)\cdot\frac{2}{3}\right|=\mathbf{1}$$




**♦別解♦**　式番号は ⑤ から振り直す．

①，③ を連立して

$$ax^2+\left(b-\frac{2}{3}\right)x+1=0$$

判別式を $D_1$ とすると，①，③ が接するとき $D_1=0$ であるから

$$D_1=\left(b-\frac{2}{3}\right)^2-4a=b^2-\frac{4}{3}b-4a+\frac{4}{9}$$

$$b^2-\frac{4}{3}b-4a+\frac{4}{9}=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

②，③ を連立して

$$ax^2+\left(b+\frac{4}{3}\right)x+1=0$$

判別式を $D_2$ とすると，②，③ が接するとき $D_2=0$ であるから

$$D_2=\left(b+\frac{4}{3}\right)^2-4a$$

$$=b^2+\frac{8}{3}b-4a+\frac{16}{9}$$

$$b^2+\frac{8}{3}b-4a+\frac{16}{9}=0 \quad \cdots\cdots⑥$$

⑥－⑤ より

$$4b+\frac{4}{3}=0 \qquad \therefore\quad b=-\frac{1}{3}$$

⑤ に代入して

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-4a=0 \qquad \therefore\quad a=\frac{1}{4}$$

③ は $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+1}$ である．

## 7

**数学B**【群数列】**標 準**

**▶解答◀**　（１）　$m$ 行 $n$ 列の数を $(m,\ n)$ と表す．

| $m \backslash n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 4 | 10 |
| 2 | 2 | 5 | 9 | |
| 3 | 6 | 8 | | |
| 4 | 7 | | | |

| 1群 | 2群 | 3群 | …… | 第$k$群 |
|---|---|---|---|---|
| $m+n=2$ | $m+n=3$ | $m+n=4$ | | $m+n=k+1$ |
| 1 | 2，3 | 4，5，6 | | |

のように群に分ける．第 $k$ 群には $k$ 項ある．$a_k$ は $k$ が奇数のときは $k$ 群の初項，$k$ が偶数のときは末項である．

$$a_{15}=\sum_{k=1}^{14}k+1=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15+1=\mathbf{106}$$

$$a_{16}=\sum_{k=1}^{16}k=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 17=\mathbf{136}$$

（２）　200 が第 $l$ 群にあるとする．

$$\frac{1}{2}l(l-1)<200\leqq\frac{1}{2}l(l+1)$$

$\frac{1}{2}l\cdot l\fallingdotseq 200$ としてみると，$l\fallingdotseq 20$ である．$l=20$ としてみると

$$190<200\leqq 210$$

で成り立つ．$l$ は偶数であるから

$$(20,\ 1)=191,\ (19,\ 2)=192,\ \cdots,$$

$$(m,\ n)=200$$

のとき $m+n=21,\ n=10$ であるから $m=11$ となる．**11** 行目の **10** 列目である．

（３）　$(n,\ n)$ は第 $2n-1$ 群の $n$ 番目であり $(2n-1$ が奇数であるから上から下へ大きくなる形)，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=\sum_{k=1}^{2n-2}k+n$$

$$=\frac{1}{2}(2n-2)(2n-1)+n=\mathbf{2n^2-2n+1}$$

結果は $n=1$ でも成り立つ．

（４）　$2n^2-2n+1\leqq 1000$

$2n^2\fallingdotseq 1000$ としてみると $n\fallingdotseq 10\sqrt{5}=22.\cdots$

$n=22$ としてみると $925\leqq 1000$ で成り立ち，$n=23$ としてみると $1013\leqq 1000$ は成り立たない．最大の $n$ は **22** で $b_n$ の最大値は **925** である．

**注 意**　**【一般形】**

$(m,\ n)=N$ とおく．$m+n-1=k$ として

$$\frac{1}{2}k(k-1)<N\leqq\frac{1}{2}k(k+1)$$

$$k^2-k-2N<0,\ k^2+k-2N\geqq 0$$

$$\frac{-1+\sqrt{1+8N}}{2}\leqq k<\frac{1+\sqrt{1+8N}}{2}$$

この区間の幅が 1 であるから

$$k=\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8N}}{2}\right\rceil$$

$\lceil x\rceil$ は ceiling function で，小数部分の切り上げ，$x$ 以上の最小の整数を表す．

$k$ が奇数のときは

$$m=N-\frac{1}{2}(k-1)k,\ n=k+1-m$$

$k$ が偶数のときは

$$n=N-\frac{1}{2}(k-1)k,\ m=k+1-n$$

## 8

**数学Ⅲ**【楕円】**標 準**

**▶解答◀**　P における接線を $l:x+y=c$ とおく．図形的に $c>0$ である．① は

$\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=1$ と書ける．$\dfrac{x}{\sqrt{3}}=X$，$\dfrac{y}{3}=Y$ とおくと，① は $X^2+Y^2=1$ となり $l$ は $\sqrt{3}X+3Y=c$ となる．$X+\sqrt{3}Y=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$ で，O との距離 $=1$ より

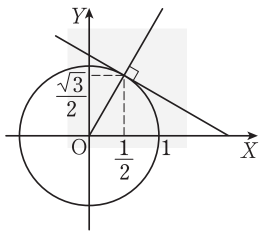
$\dfrac{\frac{c}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+3}}=1$ となり，$c=2\sqrt{3}$ である．

$$\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y=1$$

は $X^2+Y^2=1$ の $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線である．

$$\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2},\ \frac{y}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より P$\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}\right)$ である．




$x=2\sqrt{3}-y$ と $x=-ay^2-b$ を連立させて

$$2\sqrt{3}-y=-ay^2-b$$

$$ay^2-y+2\sqrt{3}+b=0$$

これが $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ を重解にもつ．解と係数の関係より

$$\frac{1}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad \frac{2\sqrt{3}+b}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

$$b=\frac{27}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}-2\sqrt{3}=\boldsymbol{-\frac{5\sqrt{3}}{4}}$$

放物線は $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}y^2+\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ となる．楕円は $x=\sqrt{3-\dfrac{y^2}{3}}$ で，求める面積を $S$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\alpha$ とおく．

$$S=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}y^2\right)-\sqrt{3-\frac{y^2}{3}}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\left(\frac{15}{4}-\frac{y^2}{3}\right)-\sqrt{9-y^2}\right)dy$$

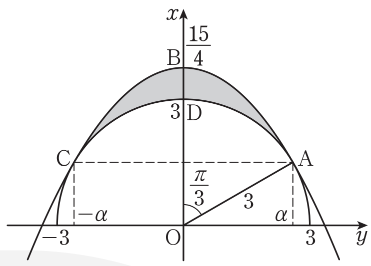
$\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる．図形 ABC から弓形 ADC をひくと考え

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}(2\alpha)^3\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\pi\cdot 3^2}{3}-\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

$$=\frac{(3\sqrt{3})^3}{6\cdot 3\sqrt{3}}-\sqrt{3}\pi+\frac{9}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}-\sqrt{3}\pi=\boldsymbol{\frac{27}{4}-\sqrt{3}\pi}$$




**別解** P の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，接線は $\dfrac{x_0x}{3}+\dfrac{y_0y}{9}=1$ であり，$y_0\neq 0$ より，傾きは $-\dfrac{3x_0}{y_0}$ で，これが $-1$ に一致するから

$$-\frac{3x_0}{y_0}=-1\qquad \therefore\quad y_0=3x_0$$

また，$\dfrac{{x_0}^2}{3}+\dfrac{{y_0}^2}{9}=1$ であるから，これと合わせて

$$\frac{{x_0}^2}{3}+{x_0}^2=1$$

$x_0>0$ より $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，$y_0=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より P の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}\right)$ である．

$x+ay^2+b=0$ を $x$ で微分して

$$1+2ayy'=0$$

$y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ のとき，$y'=1$ であるから

$$1+2a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)=0$$

$$a=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

放物線 ② は P を通るから

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+b=0$$

$$b=\boldsymbol{-\frac{5\sqrt{3}}{4}}$$

**要の分析**　昨年までとは打って変わり，急激な難化である．来年も同じ傾向になるのであれば，素早く確実な計算力や，問題の見極めが必須である．

（篠，荻原，楊，KK，安田亨）