帝京大学・医学部

試験日　2023 年 1 月 26 日 **1 2 3 4**　1 月 27 日 **5 6 7 8**

時間 120 分（英語と合わせて）数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1 （1） 放物線 $y = 2x^2 - 3x + 4$ に点 $\left(1, -\dfrac{1}{8}\right)$ から引いた接線の接点のうち，x 座標が正である接点は（$\square$，$\square$）である．

（2） 3 次関数 $f(x)$ はある実数 $p \neq 0$ に対して，$f'(p) = f'(2p) = \dfrac{p^2}{3}$，$f(p) = f(2p) = 0$ を満たすとする．

このとき，$f(p+1) = ap^2 + bp + c$ と表すことができ，$a = \square$，$b = \square$，$c = \square$ である．ただし，関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ で表すものとする．

2 （1） $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ とする．連立方程式 $\begin{cases} \cos x + \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x + \cos y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$ の解 x, y について，

$\sin(x+y) = \square$ であり，$x = \square\pi$, $y = \square\pi$ である．

（2） 平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 1$，$|-2\vec{a} + 7\vec{b}| = 1$ を満たすとする．このとき，$|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値は $\square$，最小値は $\square$ である．

3 （1） 赤，青，黄のさいころを投げるとき，

（ⅰ） 出た 3 つの目に 1 が含まれる確率は $\square$ である．

（ⅱ） 出た 3 つの目のうち，ある 2 つの積が，残りの 1 つに等しくなる確率は $\square$ である．

（ⅲ） 出た 3 つの目の平均値が整数で，分散が 2 である確率は $\square$ である．

（2） $n = 2310 (= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)$ とする．このとき，n の正の約数は $\square$ 個ある．

また，正の整数 a と b の最小公倍数が n となる組 (a, b) は $\square$ 組ある．ただし，a と b が異なる数の場合，(a, b) と (b, a) は異なる組と見なす．

4 （1） 関数 $f(x) = 3^{3x+1} - 42 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x+1}$ $(x \leqq \log_3 4)$ は，$x = \square$ で最大値 $\square$ をとる．また，最小値は $\square$ である．

（2） $\log_2 10^5$ の整数部分は $\square$ である．また，$\log_2 10^2$, $\log_2 10^3$, $\log_2 10^5$ の小数部分を，それぞれ a, b, c とするとき，$2a + 7b - 5c = \square$ である．

5 （1） x の 2 次関数 $f(x)$ が

$$\int_0^1 f(x+t)\,dt = x^2 - 2x + \frac{1}{2}f(x)$$

を満たすとき，$f(x) = \square x^2 - \square x + \square$ である．

（2） a を定数とする．2 つの放物線 $y = 2x^2 - 2x - 1$，$y = x^2 + 2ax - a^2 - a - 3$ が異なる 2 点で交わっている．2 交点のうち x 座標の小さいほうの交点を P とするとき，P の x 座標の最小値は $\square$ であり，その最小値を与える a の値は $\square$ である．

6 （1） 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ と平面 $x + 2y + 2z = 9$ が交わってできる図形を円 C とする．

（ⅰ） 円 C の半径は $\square$ である．

（ⅱ） 円 C 上に 2 点 P と Q をとるとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最小値は $\square$ である．ただし，O は原点とする．

（2） 長方形 ABCD の辺 AD 上に点 P，辺 CD 上に点 Q をとると，$\mathrm{PQ} = 20$，$\angle\mathrm{BPQ} = 90°$，$\tan\angle\mathrm{PBQ} = \dfrac{4}{7}$，$\tan\angle\mathrm{QBC} = \dfrac{1}{8}$ であった．このとき，

（ⅰ） $\mathrm{BC} = \square$ である．

（ii） $\tan\angle\mathrm{ABP} = \boxed{}$ である．

（iii） $\mathrm{AB} = \boxed{}$ である．

7 （1） すべての自然数を1から小さい順に並べ，下のように，並んでいる順にグループ分けし，k 番目のグループ G_k が $2k-1$ 個の連続する自然数から成るようにする．

$$\underbrace{1,}_{G_1}\ |\ \underbrace{2,\ 3,\ 4,}_{G_2}\ |\ \underbrace{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,}_{G_3}\ |\ \underbrace{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,}_{G_4}\ |\ \cdots$$

このとき，グループ G_n に含まれるすべての自然数の和を an^3+bn^2+cn-1 と表せば，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$，$c = \boxed{}$ である．

（2） 袋の中に白玉，赤玉が合わせて25個入っている．この袋から玉をもどさずに2個取り出すとき，同じ色の玉を取り出す確率が $\dfrac{1}{2}$ になるような赤玉の個数は，$\boxed{\text{ア}}$ または $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする．

8 （1） m を定数とする．x の2次方程式 $x^2+mx+\dfrac{m}{2}=4$ が異なる2つの整数解をもつような m は $\boxed{}$ 個あり，そのうち最大のものは $\boxed{}$，最小のものは $\boxed{}$ である．

（2） a を定数とする．x の方程式

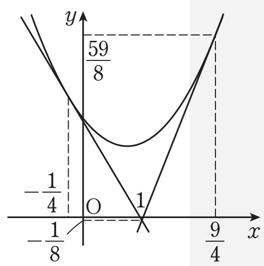
$$\log_4(x-2)^2+3\log_8 x^2-\log_2(a+1)=0$$

が異なる4個の実数解をもつような a の値の範囲は，$\boxed{} < a < \boxed{}$ である．

1 （1） 数学II 【接線】 標準

▶解答◀ $y=2x^2-3x+4$ のとき

$y'=4x-3$



放物線上の点 $\mathrm{T}(t,\ 2t^2-3t+4)$ における接線を l とする．

$$l : y=(4t-3)(x-t)+2t^2-3t+4$$

$$l : y=(4t-3)x-2t^2+4$$

l が $\left(1,\ -\dfrac{1}{8}\right)$ を通るとき

$$-\frac{1}{8}=4t-3-2t^2+4$$

$$16t^2-32t-9=0$$

$$(4t-9)(4t+1)=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{9}{4},\ -\frac{1}{4}$$

$x=\dfrac{9}{4}$ のとき T の y 座標は

$$y=\frac{81}{8}-\frac{27}{4}+4=\frac{59}{8}$$

x 座標が正である接点の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{9}{4},\ \dfrac{59}{8}}\right)$

（2） 数学II 【微分係数と導関数】 標準

考え方 以下の文字は解答の文字とは，直接は関係がない．3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a \neq 0)$ のグラフ C について，よく知られた性質を述べる．

（ア） 点 $\mathrm{M}\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$

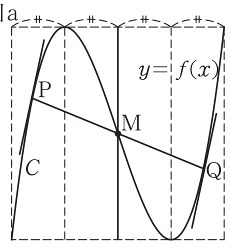
に関して C は点対称である．M は変曲点である．教科書では変曲点は「2階微分するから数学IIIである」としているが，本来，凹凸と微分は直接的な関係はない．詳しく知りたい人は拙著「崖っぷち数学III 検定外教科書」をみてほしい．$f'(x_1)=f'(x_2)$, $x_1 \neq x_2$ になるとき，$\mathrm{P}(x_1,\ f(x_1))$，$\mathrm{Q}(x_2,\ f(x_2))$ は M に関して点対称になり，$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{3a}$ となる．

（イ） 特に $f(x_1)=f(x_2)$ のとき直線 PQ は x 軸に平行であり，本問では

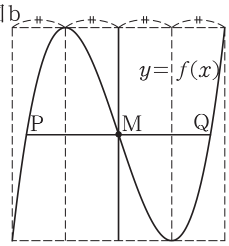
$f'(p)=f'(2p)$，$f(p)=f(2p)=0$

より $f(x)=A(x-p)(x-2p)\left(x-\dfrac{3p}{2}\right)$ となる．

図a



図b



▶解答◀　$f(p)=0,\ f(2p)=0$ より

$$f(x)=A(x-p)(x-2p)(x-\alpha),\ A\neq 0$$

とおけて

$$f'(x)=A(x-2p)(x-\alpha)+A(x-p)(x-\alpha)$$
$$+A(x-p)(x-2p)$$

$f'(p)=f'(2p)=\dfrac{p^2}{3}$ より

$$A(-p)(p-\alpha)=Ap(2p-\alpha)=\frac{p^2}{3}$$

$A\neq 0,\ p\neq 0$ より，$-p+\alpha=2p-\alpha$

$\alpha=\dfrac{3}{2}p$ であり，$A\cdot p\cdot\dfrac{p}{2}=\dfrac{p^2}{3}$ より，$A=\dfrac{2}{3}$ となる．

$$f(x)=\frac{2}{3}(x-p)(x-2p)\left(x-\frac{3}{2}p\right)$$

$$f(p+1)=\frac{2}{3}(1-p)\left(1-\frac{1}{2}p\right)$$
$$=\frac{1}{3}(1-p)(2-p)$$
$$=\frac{1}{3}(p^2-3p+2)=\frac{1}{3}p^2-p+\frac{2}{3}$$

$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3},\ b=-1,\ c=\dfrac{2}{3}}$ である．

注意　p は定数だから，$\dfrac{1}{3}p^2-p+\dfrac{2}{3}$ と ap^2+bp+c の係数を比べるというのはおかしい．「p は任意定数とする」等，何かコメントが必要だろう．

2

（1）**数学Ⅱ**【加法定理とその応用】**標準**

▶解答◀　$\cos x+\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …………①

$$\sin x+\cos y=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \cdots\cdots②$$

$①^2+②^2$ より

$$2+2\cos x\sin y+2\sin x\cos y=\frac{2}{4}+\frac{6}{4}$$
$$2+2\sin(x+y)=2$$

$\sin(x+y)=\mathbf{0}$ であり，$-\pi<x+y<\pi$ であるから $x+y=0$ である．$y=-x$ を ①，② に代入し

$$\cos x-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

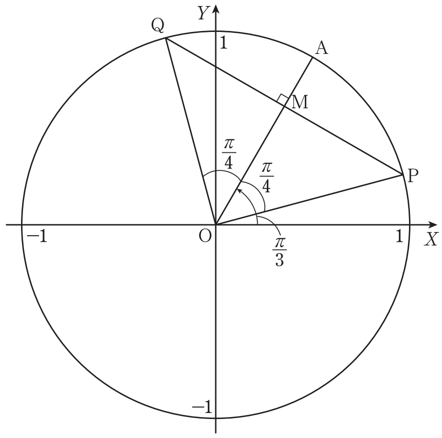
$\cos x,\ \sin x$ について解くと

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\ \sin x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{12}$$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ より $x=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12}}$ となり $y=-x=\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{12}}$

注意　**【図形的に見る】**



$z=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおくと，$\cos z=\sin y,\ \sin z=\cos y$

$$\cos x+\cos z=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x+\sin z=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\cos x+\cos z}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sin x+\sin z}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\mathrm{P}(\cos x,\ \sin x)$，$\mathrm{Q}(\cos z,\ \sin z)$，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$

とおくと，PQ の中点が M である．$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから，図のように三角形 OPM，三角形 OQM は直角二等辺三角形である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の偏角は $\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<z<\pi$ だから

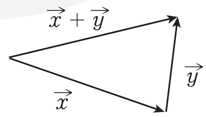
$$x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12},\ z=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$$
$$y=\frac{\pi}{2}-z=-\frac{\pi}{12}$$

（2）**数学B**【ベクトルと図形（平面）】**標準**

考え方　基底の変更（厳密な意味では基底にならないが）をする．そして，三角不等式

$$\left|\,|\vec{x}|-|\vec{y}|\,\right|\leqq|\vec{x}+\vec{y}|\leqq|\vec{x}|+|\vec{y}|$$

左の等号は $\vec{x},\ \vec{y}$ が逆向きに平行のとき，右の等号は $\vec{x},\ \vec{y}$ が同じ向きに平行のとき成り立つ．



▶解答◀　$\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{q}=-2\vec{a}+7\vec{b}$ とおく．$|\vec{p}|=1,\ |\vec{q}|=1$ である．$\vec{a},\ \vec{b}$ について解いて，

$$\vec{a}=\frac{1}{3}(7\vec{p}+2\vec{q}),\ \vec{b}=\frac{1}{3}(2\vec{p}+\vec{q})$$
$$\vec{a}+\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$$

三角不等式を用いる．

$$|3\vec{p}|-|\vec{q}|\leqq|3\vec{p}+\vec{q}|\leqq|3\vec{p}|+|\vec{q}|$$
$$3-1\leqq|3\vec{p}+\vec{q}|\leqq 3+1$$

$$2 \leqq |\vec{a}+\vec{b}| \leqq 4$$

左の等号は $\vec{p}, \vec{q}$ が逆向きに平行のとき，右の等号は $\vec{p}, \vec{q}$ が同じ向きに平行のとき成り立つ．最小値は **2**，最大値は **4** である．

注意 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |3\vec{p}+\vec{q}|^2$

$$= 9|\vec{p}|^2 + 6\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とする．$|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ より

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta = \cos\theta$$

よって

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 10 + 6\cos\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，

$$4 \leqq |\vec{a}+\vec{b}|^2 \leqq 16$$

最小値は **2**，最大値は **4** である．

3

（1）**数学B**【平均と分散】**標 準**

▶解答◀　赤，青，黄のさいころに出る目を順に a, b, c とする．

（ｉ）余事象を考えて，求める確率は $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\dfrac{91}{216}}$

（ii）（ア）$a=b=c=1$

（イ）$a=1, b=c \neq 1$ のとき (a, b, c) は 5 通りある．

（ウ）$b=1, a=c \neq 1$ のときも 5 通り．

（エ）$c=1, a=b \neq 1$ のときも 5 通り．

（オ）$a=b=2, c=4$

（カ）$a=c=2, b=4$

（キ）$b=c=2, a=4$

（ク）a, b, c が 2，3，6 の順列のとき．(a, b, c) は $3!$ 通りある．

以上，適する (a, b, c) は $1+3\cdot5+3+3! = 25$ 通りあるから，求める確率は，$\boldsymbol{\dfrac{25}{216}}$ である．

（iii）分散は各数の 2 乗の平均から平均の 2 乗を引いて求められるから

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = 2$$

$$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = 18$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca = 18$$

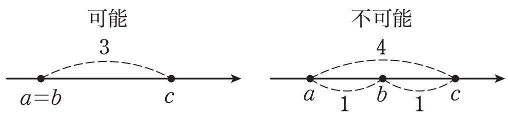
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 18$$

$(a-b)^2$，$(b-c)^2$，$(c-a)^2$ は平方数 $0, 1, 4, 9, 16, \cdots$ であるから，3 つの平方数の和で 18 を表す方法は

$$4^2+1^2+1^2,\ 3^2+3^2+0^2$$

の 2 通りがあるが，このうち 1〜6 の整数の差で表せるのは $a=1, b=1, c=4$ のように $3^2+3^2+0^2=18$ になるときのみである．a, b, c の組合せは $\{1, 1, 4\}$，$\{1, 4, 4\}$，$\{2, 2, 5\}$，$\{2, 5, 5\}$，$\{3, 3, 6\}$，$\{3, 6, 6\}$ の 6 通りあり，いずれも平均は整数になる．

例えば，$\{1, 1, 4\}$ のとき 4 の目をどのさいころに振り分けるかで 3 通りあるから，求める確率は $\dfrac{3}{216}\cdot6 = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$



◆別解◆（iii）平均を主役にして次のように解く．

平均を m とすると

$$m = \frac{a+b+c}{3}\ (m=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

分散は 2 乗の平均から平均の 2 乗を引いて求められる．

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - m^2 = 2$$

$$a^2+b^2+c^2 = 6+3m^2$$

$m=1$ のとき．

$a=b=c=1$ であるから分散は 0 となり不適．

$m=2$ のとき．

$$a^2+b^2+c^2 = 18$$

条件 $a \leqq b \leqq c$ を付け加えて c が大きい方から順に調べていくと $c=4$，$b=1$，$a=1$ が見つかり，$c \leqq 3$ では見つからない．よって $\{a, b, c\} = \{1, 1, 4\}$ である．

以下，同様にして

$m=3$ のとき．

$a^2+b^2+c^2=33$ より $\{a, b, c\} = \{2, 2, 5\}, \{1, 4, 4\}$

$m=4$ のとき．

$a^2+b^2+c^2=54$ より $\{a, b, c\} = \{3, 3, 6\}, \{2, 5, 5\}$

$m=5$ のとき．

$a^2+b^2+c^2=81$ より $\{a, b, c\} = \{3, 6, 6\}$

$m=6$ のとき．

$a=b=c=6$ であるから分散が 0 となり不適．

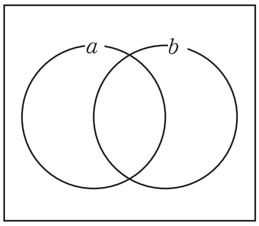
求める確率は $\dfrac{3}{216}\cdot6 = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$ である．

（2）**数学A**【整数問題の雑題】**標 準**

▶解答◀　$n=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ であるから，正の約数の個数は $2^5 = \mathbf{32}$ である．

図を見よ．a, b の最小公倍数が $n=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ のとき，2，3，5，7，11 は ☾，()，☽ のどこかに入る．どこに入るかで 3 通りずつあるから組 (a, b) は $3^5 = \mathbf{243}$ 組ある．

例えば，2 が ☾ に，3 が () に，他が ☽ に入れば $a=2\cdot3$，$b=3\cdot5\cdot7\cdot11$ と定まる．入るものがないときはそこを 1 にする．例えばすべてが ☾ に入るとき，() と ☽ は 1 にし，$a=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$，$b=1$ になる．



4 （1） 数学Ⅱ【最大値・最小値】標準

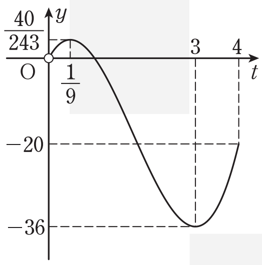
考え方 3 次関数の最大値，最小値は定義域の端点または極値でとる．

▶解答◀ $t=3^x$ とおくと，$0<t\leqq 4$

$$f(x)=3t^3-14t^2+3t$$

$g(t)=3t^3-14t^2+3t$ とおく．

$$g'(t)=9t^2-28t+3=(9t-1)(t-3)$$



$$g(0)=0,\ g\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3^5}-\frac{14}{3^4}+\frac{1}{3}=\frac{40}{243}$$

$$g(3)=81-14\cdot 9+9=-36$$

$$g(4)=3\cdot 64-14\cdot 16+12=-20$$

$t=\dfrac{1}{9}$，すなわち，$\boldsymbol{x=-2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{40}{243}}$ をとる．

$t=0$ は $g(t)$ の定義域に含まれないが，$g(3)<g(0)$ であるから最小値は $\boldsymbol{-36}$ である．

図は正確ではない．

（2） 数学Ⅱ【対数の計算】標準

▶解答◀ $\log_{10}2=0.3010$ を用いる．

$$\log_2 10^5=\frac{\log_{10}10^5}{\log_{10}2}=\frac{5}{0.3010}=16.6\cdots$$

$\log_2 10^5$ の整数部分は **16** である．

$$\log_2 10^2=\frac{2}{\log_{10}2}=\frac{2}{0.3010}=6.6\cdots$$

$$\log_2 10^3=\frac{3}{\log_{10}2}=\frac{3}{0.3010}=9.9\cdots$$

$$a=\frac{2}{\log_{10}2}-6,\ b=\frac{3}{\log_{10}2}-9,\ c=\frac{5}{\log_{10}2}-16$$

$2a+7b-5c$ に代入すると $\log_{10}2$ が消えて

$$2a+7b-5c=-12-63+80=\boldsymbol{5}$$

◆別解◆ $64<10^2<128$

$$6<\log_2 10^2<7 \quad \cdots\cdots①$$

$$512<10^3<1024$$

$$9<\log_2 10^3<10 \quad \cdots\cdots②$$

①＋② より

$$15<\log_2 10^5<17$$

$2^{16}=64\cdot 1024=65536<10^5$ であるから

$$16<\log_2 10^5<17 \quad \cdots\cdots③$$

$\log_2 10^5$ の整数部分は **16** である．

$x=\log_2 10$ とおくと，① より

$$a=\log_2 10^2-6=2x-6$$

②，③ より

$$b=3x-9,\ c=5x-16$$

$$2a+7b-5c=2(2x-6)+7(3x-9)-5(5x-16)$$

$$=-12-63+80=\boldsymbol{5}$$

5 （1） 数学Ⅱ【定積分で表された関数】標準

▶解答◀ $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．

$$\int_0^1 f(x+t)\,dt=\left[\frac{a}{3}(x+t)^3+\frac{b}{2}(x+t)^2+ct\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}((x+1)^3-x^3)+\frac{b}{2}((x+1)^2-x^2)+c$$

$$=\frac{a}{3}(3x^2+3x+1)+\frac{b}{2}(2x+1)+c$$

$$=ax^2+(a+b)x+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c \quad \cdots\cdots①$$

$$x^2-2x+\frac{1}{2}f(x)$$

$$=\left(\frac{a}{2}+1\right)x^2+\left(\frac{b}{2}-2\right)x+\frac{c}{2} \quad \cdots\cdots②$$

① と ② で係数比較して

$$a=\frac{a}{2}+1 \qquad \therefore\ a=2$$

$$2+b=\frac{b}{2}-2 \qquad \therefore\ b=-8$$

$$\frac{2}{3}-4+c=\frac{c}{2} \qquad \therefore\ c=\frac{20}{3}$$

$$f(x)=\boldsymbol{2x^2-8x+\frac{20}{3}}$$

（2） 数学Ⅰ【2 次方程式】標準

▶解答◀ $2x^2-2x-1=x^2+2ax-a^2-a-3$

$$x^2-2(a+1)x+a^2+a+2=0$$

$$x=a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-(a^2+a+2)}$$

$$=a+1\pm\sqrt{a-1}$$

$a>1$ のとき 2 つの放物線は異なる 2 点で交わり，P の x 座標は $x=a+1-\sqrt{a-1}$ である．

$$x=a-1-\sqrt{a-1}+2$$

$$=\left(\sqrt{a-1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

P の x 座標の最小値は $\mathbf{\frac{7}{4}}$ で，そのとき

$$\sqrt{a-1}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=\frac{5}{4}}$$

注意 【a について解く】

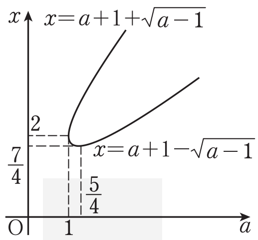
$$2x^2-2x-1=x^2+2ax-a^2-a-3$$

$$a^2+(1-2x)a+x^2-2x+2=0$$

$$a=\frac{2x-1\pm\sqrt{4x-7}}{2}$$

$4x-7\geqq 0$ であり，x の最小値は $\mathbf{\frac{7}{4}}$

そのときの $a=\frac{2x-1}{2}=\mathbf{\frac{5}{4}}$

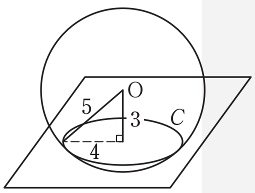


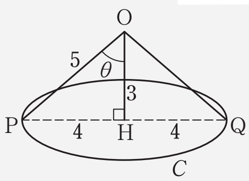
2 曲線 $x=a+1+\sqrt{a-1}$（点 $(1,\ 2)$ 以上の部分），$x=a+1-\sqrt{a-1}$ を描き，それを縦に切って断面があるのは $a\geqq 1$ の部分，横に切って断面があるのは $x\geqq\frac{7}{4}$ の部分である．ただし，x が 2 つ存在するのは $a>1$ の部分である．

6

（1） 数学B【ベクトルと図形（空間）】標準

▶解答◀ **（i）** 球の中心 $(0,\ 0,\ 0)$ から平面 $x+2y+2z-9=0$ までの距離は $\frac{|-9|}{\sqrt{1+4+4}}=3$ であるから，C の半径は $\sqrt{5^2-3^2}=\mathbf{4}$ である．





（ii） O から平面に下ろした垂線の足を H とする．△OPH は，3 辺の長さが 3，4，5 の直角三角形であり，これが OH を軸として回転する．$\angle\mathrm{POH}=\theta$ とする．$\cos\theta=\frac{3}{5},\ \sin\theta=\frac{4}{5}$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\angle\mathrm{POQ}=5^2\cos\angle\mathrm{POQ}$

が最小になるのは $\angle\mathrm{POQ}$ が一番大きく開いたときで，そのとき $\angle\mathrm{POQ}=2\theta$ である．

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=25\cos\angle\mathrm{POQ}$ の最小値は $\mathbf{-7}$ である．

◆別解◆ $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=50-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=25-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$$

PQ が最大となるのは点 P，Q が円 C の直径の両端になるときでそのとき $\mathrm{PQ}=8$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq 25-\frac{64}{2}=-7$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最小値は $\mathbf{-7}$ である．

（2） 数学I【平面図形の難題】標準

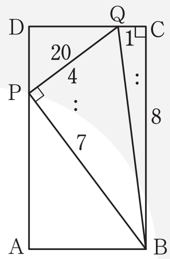
▶解答◀ **（i）** 図を見よ．$\tan\angle\mathrm{PBQ}=\frac{4}{7}$ より，$\mathrm{PQ}:\mathrm{PB}=4:7$ であるから，△BPQ に三平方の定理を用いて

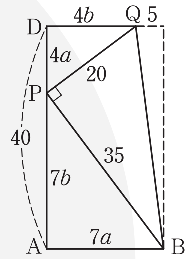
$$\mathrm{BQ}=\sqrt{\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PB}^2}=5\sqrt{16+49}=5\sqrt{65}$$

$\tan\angle\mathrm{QBC}=\frac{1}{8}$ より，$\mathrm{CQ}=x,\ \mathrm{BC}=8x$ とおくと

$$x^2+64x^2=25\cdot 65 \qquad \therefore \quad x=5$$

$$\mathrm{BC}=\mathbf{40}$$





（ii） $\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{QDP}$ で相似比は $7:4$ である．

$\mathrm{AB}=7a,\ \mathrm{AP}=7b,\ \mathrm{DP}=4a,\ \mathrm{DQ}=4b$ とおくと

$$4a+7b=40,\ 7a-4b=5$$

が成り立つ．この連立方程式を解いて $a=3,\ b=4$

$$\tan\angle\mathrm{ABP}=\frac{b}{a}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

（iii） $\mathrm{AB}=7a=\mathbf{21}$

7

（1） 数学B【群数列】基本

▶解答◀ グループ G_k の最後の項は

$$1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$$

であるから，グループ G_n に含まれる項の和は

$$((n-1)^2+1)+((n-1)^2+2)+\cdots+n^2$$

$$=\frac{(n-1)^2+1+n^2}{2}\cdot(2n-1)$$

$$=(n^2-n+1)(2n-1)$$

$$=2n^3-3n^2+3n-1$$

$$\boldsymbol{a=2,\ b=-3,\ c=3}$$

（2） 数学A【確率の雑題】基本

▶解答◀ 赤玉の個数を x とする．2 個とも同じ色である確率が $\frac{1}{2}$ であるとき

$$\frac{{}_x\mathrm{C}_2+{}_{25-x}\mathrm{C}_2}{{}_{25}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x(x-1)+(25-x)(24-x)}{25\cdot 24}=\frac{1}{2}$$

$$2x^2-50x+25\cdot 24=25\cdot 12$$

$$x^2-25x+150=0$$

$$(x-10)(x-15)=0 \qquad \therefore\quad x=\mathbf{10,\ 15}$$

8　（1）数学Ⅱ【解と係数の関係】標 準

▶解答◀　2 つの整数解を $\alpha,\beta\ (\alpha>\beta)$ とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-m,\ \alpha\beta=\frac{m}{2}-4$$

m を消去して

$$2\alpha\beta+\alpha+\beta=-8$$

$$4\alpha\beta+2\alpha+2\beta=-16$$

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)=-15$$

$$(2\alpha+1,\ 2\beta+1)=(1,\ -15),\ (3,\ -5),\ (5,\ -3),\ (15,\ -1)$$

$$(\alpha,\ \beta)=(0,\ -8),\ (1,\ -3),\ (2,\ -2),\ (7,\ -1)$$

$$m=8,\ 2,\ 0,\ -6$$

方程式が異なる 2 つの整数解をもつ m は **4** 個あり，そのうち最大は **8** で最小は **−6** である．

♦別解♦　$x^2+mx+\frac{m}{2}-4=0$

$$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-2m+16}}{2}=\frac{-m\pm\sqrt{(m-1)^2+15}}{2}$$

これが整数になるとき，$\sqrt{(m-1)^2+15}=N$ とおくと，N は 0 以上の整数で

$$N^2-|m-1|^2=15$$

$$(N+|m-1|)(N-|m-1|)=15$$

$N+|m-1|\geqq N-|m-1|\geqq 1$ であるから

$$\begin{pmatrix} N+|m-1| \\ N-|m-1| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} N \\ |m-1| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m-1=\pm 7,\ \pm 1 \qquad \therefore\quad m=8,\ -6,\ 2,\ 0$$

$x=\frac{m\pm N}{2}=\frac{m}{2}\pm\frac{N}{2}$ はいずれも整数となる．m は **4** 個あり，最大は $m=\mathbf{8}$，最小は $m=\mathbf{-6}$ である．

（2）数学Ⅱ【微分と方程式】標 準

▶解答◀　真数条件より $x\neq 0,\ 2,\ a>-1$

$$\log_4(x-2)^2+3\log_8 x^2-\log_2(a+1)=0$$

$$\log_2|x-2|+2\log_2|x|=\log_2(a+1)$$

$$\log_2 x^2|x-2|=\log_2(a+1)$$

$$x^2|x-2|=a+1$$

$f(x)=x^2(x-2)$ とおく．

$$f(x)=x^3-2x^2$$

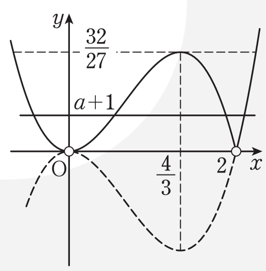
$$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$$

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{32}{27}$$

$y=x^2|x-2|$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフの $y\leqq 0$ の部分を x 軸に関して折り返して得られる．

求める a の値の範囲は

$$0<a+1<\frac{32}{27} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{-1<a<\frac{5}{27}}$$



要の分析　問題数は多いが 1 問 1 問は軽い．

（茅嶋，遠藤，安田亨）