岩手医科大学・医

試験日　医　2023年1月18日　時間120分(英語と合わせて)　**1** **2** **3**　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 座標平面上に，定点 A$(2, 1)$ と円 $C : (x+3)^2 + y^2 = 9$ がある．また，点 P を円 C 上の動点とし，線分 AP の中点を M とする．次の問い(1)〜(4)に答えよ．

(1) 点 P の座標は，θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲の実数として

$$\mathrm{P}\left(\square\cos\theta - \square,\ \square\sin\theta\right)$$

と表すことができる．このとき，AP の中点 M の座標は

$$\mathrm{M}\left(\frac{\square}{\square}\cos\theta - \frac{\square}{\square},\ \frac{\square}{\square}\sin\theta + \frac{\square}{\square}\right)$$

である．

(2) 点 P が円 C 上を1周するとき，M の軌跡は $\left(-\dfrac{\square}{\square},\ \dfrac{\square}{\square}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\square}{\square}$ の円である．

(3) 点 P における円 C の接線上にあり，P からの距離が $3\sqrt{3}$ であるような2つの点のうちの一方を点 Q とする．点 P が円 C 上を1周するとき，Q の軌跡は半径 $\square$ の円である．

(4) (3)の軌跡上に定点 $\mathrm{Q_0}$ をとる．P が円 C 上を1周するとき，線分 $\mathrm{PQ_0}$ が通過する領域の面積は

$$\square\sqrt{\square} + \square\pi$$

である．

2 座標空間において，xy 平面上の原点 O を中心とする半径6の円 C を1つの底面とし，平面 $z = 3$ 上にもう1つの底面がある直円柱 P がある．M$(3, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面 α と円 C の交点を A，B とする．また，点 $(6, 0, 3)$ を D とする．次の問い(1)〜(4)に答えよ．

(1) $\mathrm{AB} = \square\sqrt{\square}$, $\mathrm{DM} = \square\sqrt{\square}$ である．

(2) 平面 α によって円柱 P を2つの部分に分けるとき，小さい方の部分の体積は $\square\pi - \square\sqrt{\square}$ である．

(3) 3点 A，B，D を通る平面で，円柱 P を2つの部分に分けるとき，小さい方の部分を立体 Q とする．t を $3 \leqq t \leqq 6$ を満たす実数とし，Q を平面 $x = t$ によって切断した切り口の面積を $S(t)$ とするとき，

$$S(t) = \square\left(t - \square\right)\sqrt{\square - t^2}$$

である．

(4) 立体 Q の体積 V は $V = \square\sqrt{\square} - \square\pi$ である．

3 人形が2体ずつ入った中身の見えないカプセルがある．人形は10種類あり，同じ種類の人形は区別できない．各カプセルには異なる2種類の人形が1体ずつ入っている．また，2種類の人形の組合せすべてについてカプセルがあり，どのカプセルも他のカプセルと中の人形の種類が少なくとも1つは異なるものとする．

すべてのカプセルのうちから3個を取り出し，それらの中に入っている合計6体の人形について，異なる種類が n 種類であるとする．次の問い(1)〜(4)に答えよ．

(1) カプセルは全部で $\square$ 個あり，各種類の人形はそれぞれ $\square$ 個のカプセルに入っている．

(2) n のとり得る値の範囲は $\square \leqq n \leqq \square$ である．

(3) $n = 5$ となる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

(4) $n = 4$ となる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

1

数学Ⅱ【軌跡】標 準

▶解答◀　（1）　円 $C:(x+3)^2+y^2=9$ は中心 $(-3,0)$，半径 3 であるから，この円周上の点 P は

$$\mathbf{P(3\cos\theta-3,\ 3\sin\theta)}$$

と表される．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ である．また，A$(2,1)$ と P の中点 M の座標は

$$\mathbf{M\left(\frac{3}{2}\cos\theta-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\right)}$$

である．

（2）　M(X,Y) とする．（1）より

$$X+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cos\theta,\ Y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\sin\theta$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ が成り立つから

$$\frac{9}{4}\sin^2\theta+\frac{9}{4}\cos^2\theta=\frac{9}{4}$$

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

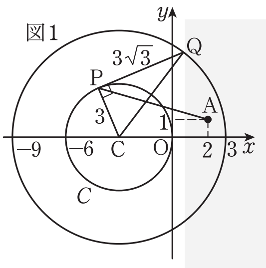
よって，M の軌跡は円 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，すなわち中心が $\left(\mathbf{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$，半径 $\mathbf{\frac{3}{2}}$ の円である．

（3）　C$(-3,0)$ として，$\angle\mathrm{CPQ}=90^\circ$ であり

$$\mathrm{CQ}=\sqrt{\mathrm{CP}^2+\mathrm{PQ}^2}=\sqrt{9+27}=6$$

よって，Q の軌跡は中心 $(-3,0)$，半径 **6** の円である．

図1



（4）　定点 $\mathrm{Q_0}$ を $(-3,6)$ にとり，P を円 C 上で一周させたのが図 2 である．求める面積は図 3 の網目部分である．

このとき $\mathrm{Q_0}$ から円に接線を引き，接点を $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$ とする．$\triangle\mathrm{CP_1Q_0}$ と $\triangle\mathrm{CP_2Q_0}$ は合同で，比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である．

扇形の面積と直角三角形 2 つ分の和を考え

$$\pi\cdot3^2\cdot\frac{240}{360}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sqrt{3}\cdot2$$

$$=\mathbf{9\sqrt{3}+6\pi}$$

図2

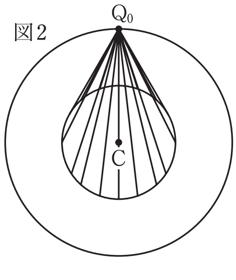
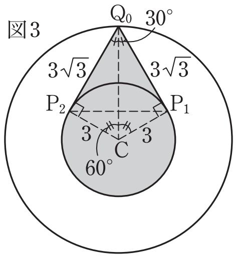


図3



2

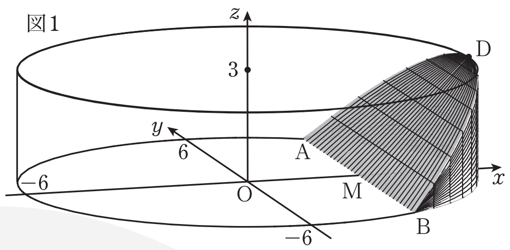
数学Ⅲ【体積】標 準

▶解答◀　（1）　△OAM は 60 度定規で

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\cdot3\sqrt{3}=\mathbf{6\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{DM}=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

図1



（2）　図 2 の網目部分（弓形 AB）の面積を S_1 とする．

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot6^2\left(\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{2}{3}\pi\right)=12\pi-9\sqrt{3}$$

底面積 S_1，高さが 3 の柱の体積を求め

$$S_1\cdot3=\mathbf{36\pi-27\sqrt{3}}$$

図2

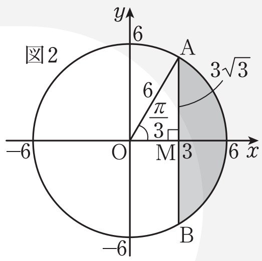
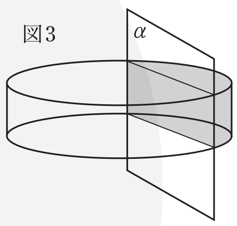


図3



（3）　3 点 A，B，D を通る平面は，y 軸の方向から見ると 1 本の直線のように見える (図 4)．$z=x-3$ である．図 6 は立体 Q を平面 $x=t$ で切って $x<t$ の部分を消し去ったものである．

図4

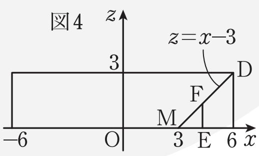
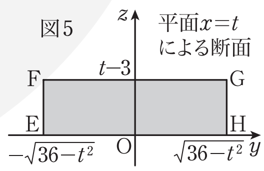
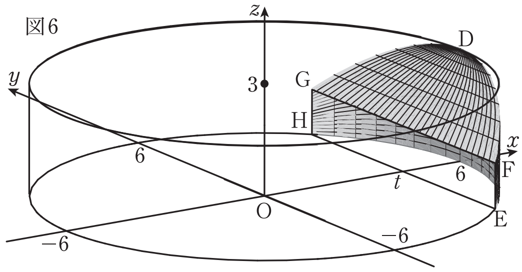


図5



立体 Q を平面 $x=t$ $(3\leqq t\leqq6)$ で切ると断面は図 5，図 6 の長方形 EFGH となる．$x^2+y^2=6^2$ で $x=t$ とおくと，$y=\pm\sqrt{36-t^2}$ となる．

図6



$z=x-3$ で $x=t$ とおくと $z=t-3$ である．断面

積 $S(t)$ は

$$S(t) = (t-3)\cdot 2\sqrt{36-t^2} = \mathbf{2(t-3)\sqrt{36-t^2}}$$
$$= 2\left(t\sqrt{36-t^2} - 3\sqrt{36-t^2}\right)$$
$$= 2\left\{-\frac{1}{2}(36-t^2)'(36-t^2)^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{36-t^2}\right\}$$

（**4**）　$2\sqrt{36-t^2}$ の積分は S_1 であることに注意せよ．

$$V = \int_3^6 S(t)\,dt = \left[-\frac{2}{3}(36-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_3^6 - 3S_1$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 27^{\frac{3}{2}} - 36\pi + 27\sqrt{3}$$
$$= 54\sqrt{3} - 36\pi + 27\sqrt{3} = \mathbf{81\sqrt{3} - 36\pi}$$

3　数学A【独立試行・反復試行の確率】標準

▶解答◀　（**1**）　10 種類の人形に 1, 2, 3, ⋯, 10 と番号をつける．人形 2 体の組合せは全部で ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 通りあるから，カプセルは全部で **45** 個ある．

また各種類の人形は，自分以外の 9 種類の人形とカプセルに入ることができる．よって，**9** 個のカプセルに入っている．

（**2**）　2 種類の人形のみで複数のカプセルを作ることはできないから $n \geqq 3$ である．$n = 3$ は，$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ のように取れば実現可能である．

そして，3 個のカプセルの中身の人形がすべて異なるとき，$n = 6$（人形は全部で 10 体あるから可能である）であるから，$n \leqq 6$ である．

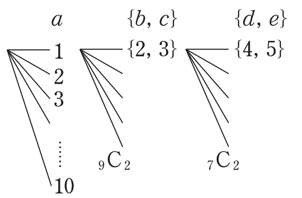
よって，$\mathbf{3 \leqq n \leqq 6}$

（**3**）　全 45 個の中から 3 個のカプセルを取り出す組合せは，${}_{45}\mathrm{C}_3$ 通りある．以下 $a, b, c, \cdots$ 等は異なる数を表す．

$n = 5$ のとき，$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{4, 5\}$ のように同じ種類の人形が 2 つのカプセルに入っていて，もう 1 つのカプセルには，それらと異なる人形が入っている場合．これを $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{d, e\}$ とする．

a が何かで 10 通りある．たとえば $a = 1$ のとき $\{b, c\}$（組合せ）が何かで ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある．たとえば $a = 1$, $\{b, c\} = \{2, 3\}$ のとき $\{d, e\}$ が何かで ${}_7\mathrm{C}_2$ 通りある．よって求める確率は

$$\frac{10\cdot{}_9\mathrm{C}_2\cdot{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{45}\mathrm{C}_3} = \frac{10\cdot\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}\cdot\dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1}}{\dfrac{45\cdot 44\cdot 43}{3\cdot 2\cdot 1}}$$
$$= \frac{2\cdot 9\cdot 2\cdot 7}{11\cdot 43} = \mathbf{\frac{252}{473}}$$



（**4**）　$n = 4$ のとき

（ア）　$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$ のタイプのとき．

a が何かで 10 通りあり，$\{b, c, d\}$ が何かで ${}_9\mathrm{C}_3$ 通りある．このタイプは $10\cdot{}_9\mathrm{C}_3$ 通りある．

（イ）　$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ のタイプのとき（ただし $a < b$ とする）．

$\{a, b\}$ が何かで ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りある．

$\{1, 2\}$ のとき，1 の相手の c が何かで 8 通り，2 の相手の d が何かで 7 通りある．このタイプは ${}_{10}\mathrm{C}_2\cdot 8\cdot 7$ 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{10\cdot{}_9\mathrm{C}_3 + {}_{10}\mathrm{C}_2\cdot 8\cdot 7}{{}_{45}\mathrm{C}_3}$$
$$= \frac{10\cdot\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} + \dfrac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot 8\cdot 7}{\dfrac{45\cdot 44\cdot 43}{3\cdot 2\cdot 1}}$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 + 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 3}{45\cdot 44\cdot 43}$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 4}{45\cdot 44\cdot 43} = \frac{2\cdot 8\cdot 7}{11\cdot 43} = \mathbf{\frac{112}{473}}$$