23-SMRi-i_ko-kakunin : 2023/09/02 (16:14)

聖マリアンナ医科大学・医学部-後期

試験日　2023 年 3 月 2 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1）$\dfrac{\sin 65^\circ + \sin 55^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}$ の値を求めると $\boxed{}$ である．

（2） 直線 $x + y = a$ が楕円 $C : x^2 + 2y^2 = 20$ の接線となるのは $a = \pm\boxed{}$ のときである．これらの接線に垂直となる C の接線は 2 本ある．これら 4 本の接線で囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である．

（3） 正の整数 n に対して $\sqrt{n}$ の整数部分を a_n で表す．例えば $a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_5 = 2$ である．正の整数 k に対して，$a_n = k$ となる n の個数を k を用いて表すと $\boxed{}$ となる．また，$\sum_{n=1}^{2023} a_n$ を求めると $\boxed{}$ となる．

2 $z \neq 1$ なる複素数 z に対して

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

と定める．また，$z \neq -1$ なる複素数 z に対して

$$g(z) = \frac{-z}{z+1}$$

と定める．

（1） 複素数 z を $z = x + yi$ ($x,\ y$ は実数，i は虚数単位) で表す．(ⅰ)，(ⅱ) の $\boxed{}$ に当てはまる適切な選択肢を (a)〜(h) より選び，その記号を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(ⅰ) $|f(z)| = |g(z)|$ が成り立つための z の必要十分条件は $\boxed{}$ である．

(ⅱ) $z \neq 0$ とする．$\arg \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つための z の必要十分条件は $\boxed{}$ かつ $\boxed{}$ である．

(a) $x = 0$	(b) $y = 0$	(c) $x > 0$	(d) $y > 0$
(e) $x < 0$	(f) $y < 0$	(g) $x^2 + y^2 = 1$	(h) $x^2 + y^2 = 2$

（2） $z \neq -1$ かつ $g(z) \neq 1$ である z に対して，

$$h(z) = f(g(z)) = \frac{g(z)}{g(z) - 1}$$

と定める．(ⅰ)〜(ⅲ) の $\boxed{}$ に当てはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(ⅰ) $z = h(z)$ を満たす複素数は $z = \boxed{}$ である．

(ⅱ) $z_1 = 2$ として，

$$z_{n+1} = h(z_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．数列 $\{z_n\}$ の一般項を n を用いて表すと $z_n = \dfrac{2}{\boxed{}}$ である．

(ⅲ) 複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円 C_1 の周上を点 z が動くとき，$w = h(z)$ で定まる点 w のえがく図形 C_2 は点 $\boxed{}$ を中心とする半径 $\boxed{}$ の円となる．
同様に $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，図形 C_{n+1} を「点 z が C_n の周上を動くとき，$w = h(z)$ で定まる点 w のえがく図形」と定義する．図形 C_n は点 $\boxed{}$ を中心とする半径 $\boxed{}$ の円となる．

3 n を正の定数とし，$n > a > 0$ とする．関数 $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ に対して，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^a (1 - f(x))^{n-a}$$

とおく．以下の設問 (1)〜(3) の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

（1） x が実数全体を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{} < f(x) < \boxed{}$$

である．また，$f(x) = \dfrac{1}{2}$ となる x の値は $\boxed{}$ である．

（2） $g(x)$ が最大となる x の値は $\boxed{}$ であり，その最大値 L を n と a を用いて表すと $\boxed{}$ である．

（3） (2) で求めた L を a の関数と考える．a が $n > a > 0$ の範囲を動くとき，L の最小値は $\boxed{}$ である．

4　以下の設問（1）の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数と（2）に対する解答を解答用紙の所定の欄に記載せよ．

（1）　赤玉 6 個，白玉 5 個を入れてよくかき混ぜた箱がある．この箱から 4 個の玉を同時にとり出す．

（i）　とり出した 4 個の玉のうち赤玉がちょうど 2 個となる確率は $\boxed{}$ である．

（ii）　とり出した 4 個の玉に赤玉が 1 個以上含まれる確率は $\boxed{}$ である．

（2）　n は 40 以上の整数とする．白玉だけが n 個入った箱があり，この箱から 40 個の玉をとり出し，しるしをつけてから箱に戻してよくかき混ぜる．
この箱から 20 個の玉を同時にとり出すとき，とり出した 20 個の玉のうち 3 個にしるしがついている確率を $L(n)$ で表す．$L(n)$ を最大にする n を求めよ．なお求める過程も記載すること．

1　（1）　数学Ⅱ【加法定理とその応用】基本

▶解答◀　$\sin 65° + \sin 55°$

$= \sin(60° + 5°) + \sin(60° - 5°)$

$= 2\sin 60° \cos 5°$

$\cos 50° + \cos 40°$

$= \cos(45° + 5°) + \cos(45° - 5°)$

$= 2\cos 45° \cos 5°$

であるから，

$$\frac{\sin 65° + \sin 55°}{\cos 50° + \cos 40°} = \frac{\sin 60°}{\cos 45°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

（2）　数学Ⅲ【楕円】標準

▶解答◀　$x + y = a$ と C から y を消去して

$x^2 + 2(a - x)^2 = 20$

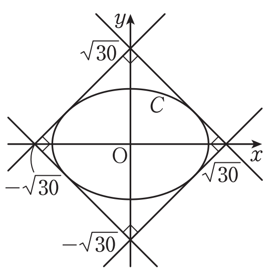
$3x^2 - 4ax + (2a^2 - 20) = 0$ ……………………①

$x + y = a$ と C が接する条件は ① が重解をもつことで，それは ① の判別式を D としたとき $D = 0$ である．

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 3(2a^2 - 20)$$

$$= -2a^2 + 60 = 0$$

よって，$a = \pm\boldsymbol{\sqrt{30}}$ である．$x + y = \sqrt{30}$, $x + y = -\sqrt{30}$ に垂直な接線を考えると，図のようになる．これより，4 本の接線で囲まれた図形は，1 辺の長さが $\sqrt{2} \cdot \sqrt{30} = \sqrt{60}$ の正方形となるから，その面積は **60** である．



（3）　数学B【数列の雑題】標準

▶解答◀　$a_n = k$ となるとき，

$k \leqq \sqrt{n} < k + 1$

$k^2 \leqq n < (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$

であるから，$a_n = k$ となる n の個数は

$(k^2 + 2k) - k^2 + 1 = \boldsymbol{2k + 1}$

である．$k^2 \fallingdotseq 2023$ としてみると $k \fallingdotseq 45$ であり，

$44^2 \leqq 2023 < 45^2 = 2025$

である．ここで，$a_n = k$ となるものの和は $k(2k + 1)$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{2023} a_n = \sum_{n=1}^{2024} a_n - a_{2024}$$

$$= \sum_{k=1}^{44} k(2k + 1) - 44 = \sum_{k=1}^{44} (2k^2 + k) - 44$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 44 \cdot 45 \cdot 89 + \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 45 - 44$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 44 \cdot 45(178 + 3) - 44 = \boldsymbol{59686}$$

2　数学Ⅲ【複素数と図形】やや難

▶解答◀　（1）（i）　$z = x + yi$ (x, y は実数) とおく．

$|f(z)| = |g(z)|$

$$\left|\frac{z}{z - 1}\right| = \left|\frac{-z}{z + 1}\right|$$

$z = 0$ のとき，これは成立する．$z \neq 0$ のとき

$|z - 1| = |z + 1|$

$|(x - 1) + yi| = |(x + 1) + yi|$

$(x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 + y^2$　　$\therefore$　$x = 0$

$z = 0$ は $x = 0$ も満たしているから，$|f(z)| = |g(z)|$ となるための必要十分条件は，**(a)** $\boldsymbol{x = 0}$ である．

（ii）　$\arg \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\pi}{2}$ となるための必要十分条件は，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ が，虚部が正の純虚数になることである．ここで，

$$\frac{f(z)}{g(z)} = -\frac{z + 1}{z - 1} = -\frac{(x + 1) + yi}{(x - 1) + yi}$$

$$= -\frac{\{(x + 1) + yi\}\{(x - 1) - yi\}}{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$= -\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}i$$

であるから，$\arg\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\pi}{2}$ となるための必要十分条件は **(g)** $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$ かつ **(d)** $\boldsymbol{y>0}$ である．

（**2**）（**i**） $h(z) = \dfrac{\frac{-z}{z+1}}{\frac{-z}{z+1}-1}$

$$= \frac{-z}{-z-(z+1)} = \frac{z}{2z+1}$$

であるから，$z = h(z)$ のとき

$$z = \frac{z}{2z+1}$$

$$z(2z+1) = z$$

$$2z^2 = 0 \qquad \therefore \quad z = \mathbf{0}$$

（**ii**） $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2z_n+1}$

ある n に対して $z_{n+1}=0$ になると仮定すると $z_n=0$ となり，これを繰り返すと $z_{n+1}=0$，$z_n=0, \cdots, z_1=0$ となる．これは $z_1 \neq 0$ に反する．よって常に $z_n \neq 0$ である．逆数をとって

$$\frac{1}{z_{n+1}} = 2 + \frac{1}{z_n}$$

$$\frac{1}{z_{n+1}} - \frac{1}{z_n} = 2$$

これより，数列 $\left\{\dfrac{1}{z_n}\right\}$ は等差数列であるから，

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{z_1} + 2(n-1) = 2n - \frac{3}{2}$$

よって，$z_n = \boldsymbol{\dfrac{2}{4n-3}}$ である．

（**iii**） $w = \dfrac{z}{2z+1}$

$$(2z+1)w = z$$

$$(2w-1)z = -w$$

$w = \dfrac{1}{2}$ のとき，これは成立しないから $z = -\dfrac{w}{2w-1}$ となる．$C_1 : |z-1| = 1$ であるから，

$$\left|-\frac{w}{2w-1} - 1\right| = 1$$

$$|w + (2w-1)| = |2w-1|$$

$$|3w-1| = |2w-1|$$

$$(3w-1)(3\overline{w}-1) = (2w-1)(2\overline{w}-1)$$

$$5w\overline{w} - w - \overline{w} = 0$$

$$\left(w - \frac{1}{5}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

$$\left|w - \frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$$

これより，C_2 は点 $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$ を中心とする，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$ の円である．

さらに，C_1 上にある z に対して，数列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = z,\ z_{n+1} = h(z_n)$$

で定めると，z_n は C_n 上にある．$w = z_n$ とおくと，(ii) と同様に考えると

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{z} + 2(n-1)$$

$$z = \frac{w}{1-2(n-1)w}$$

であるから，これを $C_1 : |z-1| = 1$ に代入して

$$\left|\frac{w}{1-2(n-1)w} - 1\right| = 1$$

$$|(2n-1)w-1| = |2(n-1)w-1|$$

$$((2n-1)w-1)((2n-1)\overline{w}-1)$$

$$= (2(n-1)w-1)(2(n-1)\overline{w}-1)$$

$$(4n-3)w\overline{w} - w - \overline{w} = 0$$

$$\left(w - \frac{1}{4n-3}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{4n-3}\right) = \frac{1}{(4n-3)^2}$$

$$\left|w - \frac{1}{4n-3}\right| = \frac{1}{4n-3}$$

これより，C_n は点 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4n-3}}$ を中心とする，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4n-3}}$ の円である．

注意

1°【$z_{n+1} \neq 0$ に関して】

$$z_{n+1} = \frac{1}{2z_n+1}z_n = \frac{1}{2z_n+1}\cdot\frac{1}{2z_{n-1}+1}z_{n-1}$$

$$= \cdots = \frac{1}{2z_n+1}\cdot\frac{1}{2z_{n-1}+1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2z_1+1}z_1 \neq 0$$

2°【1 次分数形漸化式の一般的解法】

漸化式

$x_{n+1} = \dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$，$ad-bc \neq 0$

では特性方程式 $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ の解を α, β とすると

（ア） $\alpha \neq \beta$ のとき $\dfrac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$ が等比数列をなす．だから $\dfrac{x_{n+1}-\beta}{x_{n+1}-\alpha}$ に $x_{n+1} = \dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$ を代入して整理すると

$$\frac{x_{n+1}-\beta}{x_{n+1}-\alpha} = R\cdot\frac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$$

の形になる．R は定数である．

（イ） $\alpha \neq \beta$ のとき $\dfrac{1}{x_n-\alpha}$ が等差数列をなす．だから $\dfrac{1}{x_{n+1}-\alpha}$ に $x_{n+1} = \dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$ を代入して整理すると $\dfrac{1}{x_{n+1}-\alpha} = \dfrac{1}{x_n-\alpha} + A$

の形になる．A は定数である．

なお，これを「証明せよ」という入試問題は出たことがないので，証明は無視してよい．文字係数のままで証明するのは，無駄に鬱陶しいだけである．また，これらの性質は複素変換 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ の定型をふまえたものである．

23-SMRi-i_ko-kakunin : 2023/09/02 (16:14)

複素変換 $w=\dfrac{z}{2z+1}$ では，不動点（漸化式では特性方程式というが，複素変換では不動点という）$z=\dfrac{z}{2z+1}$ は $z=0$ の重解である．したがって，$\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{z}+A$ の形になる．

3 数学Ⅲ【最大値・最小値】標準

▶解答◀　（1）

$$f'(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$$

$f(x)$ は単調増加であり

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{0}{1+0}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

となるから，$f(x)$ の値域は $\boldsymbol{0<f(x)<1}$ である．また，$f(x)=\dfrac{1}{2}$ となるとき，$\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{2}$

$2e^x=1+e^x$ となり，$e^x=1$ で $x=\mathbf{0}$

（2）　$f(x)=t$ とおくと，（1）より $0<t<1$ であり $g(x)=t^a(1-t)^{n-a}$ である．$h(t)=t^a(1-t)^{n-a}$ とおくと，$0<t<1$ において

$$h'(t)=at^{a-1}(1-t)^{n-a}-t^a(n-a)(1-t)^{n-a-1}$$
$$=t^{a-1}(1-t)^{n-a-1}\{a(1-t)-(n-a)t\}$$
$$=t^{a-1}(1-t)^{n-a-1}(a-nt)$$

であるから，$h(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{n}$	$\cdots$	1
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗		↘	

$$h\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{a}{n}\right)^a\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-a}=\frac{a^a(n-a)^{n-a}}{n^n}$$

$t=\dfrac{a}{n}$ のとき，

$$\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{a}{n}$$

$ne^x=a+ae^x$ となり，$e^x=\dfrac{a}{n-a}$ となる．

$x=\boldsymbol{\log\dfrac{a}{n-a}}$ であり，このとき最大値

$$L=h\left(\frac{a}{n}\right)=\boldsymbol{\frac{a^a(n-a)^{n-a}}{n^n}}$$

（3）　L の分子は正であるから，log をとった

$$\log a^a(n-a)^{n-a}$$
$$=a\log a+(n-a)\log(n-a)$$

の最小値を考える．

$$F(a)=a\log a+(n-a)\log(n-a)$$

とおくと，$0<a<n$ において

$$F'(a)=\log a+1-\log(n-a)-1$$
$$=\log a-\log(n-a)$$

$a>n-a$ のとき $\log a>\log(n-a)$，
すなわち，$a>\dfrac{n}{2}$ のとき $F'(a)>0$，

$a<n-a$ のとき $\log a<\log(n-a)$，
すなわち，$a<\dfrac{n}{2}$ のとき $F'(a)<0$

であるから，$F(a)$ の増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\dfrac{n}{2}$	$\cdots$	n
$F'(a)$		$-$	0	$+$	
$F(a)$		↘		↗	

$$F\left(\frac{n}{2}\right)=2\cdot\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}=n\log\frac{n}{2}=\log\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

よって，L の最小値は $\dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n^n}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2^n}}$ である．

注意　【平均値の定理】

私は平均値の定理が大好きである．

$f(b)=f(a)=(b-a)f'(c)$ となる c が存在する．ただし c は a と b の間の数で，間の数とは

$a<b$ のとき $a<c<b$

$a>b$ のとき $a>c>b$

$a=b$ のとき $a=c=b$

という意味である．$g(x)=\log x$ として $g'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\log a-\log(n-a)=g(a)-g(n-a)$$
$$=\{a-(n-a)\}g'(c)=(2a-n)\cdot\frac{1}{c}$$

となる c が存在する．ただし，c は a と $n-a$ の間の数（上の意味）で $c>0$ である．

このように表現すると，$a=\dfrac{n}{2}$ で極小かつ最小になることは見やすい．

生徒に解かせると，符号のことは，誤魔化す．すなわち，$F'(a)=\log a-\log(n-a)=0$ を解くと $a=\dfrac{n}{2}$ となる．上の増減表を書き，$a=\dfrac{n}{2}$ で最小になるという．「$F'(a)$ の符号がこうなるというのは，どうやって判別するの？」というと，大抵，だまっている．つまり，結論ありきで，結論に合わせて増減表を書くのである．中には「問題文に最小って書いてあるから，それに合わせたのです」と正直に言う人もいる．「じゃあ，問題文が，最大って書いてあったら，それに合わせて ↗↘ にするんだね？」と言うと嫌な顔をしている．

4 数学A【確率の雑題】標準

▶解答◀　（1）　取り出す玉の組合せは全部で ${}_{11}\mathrm{C}_4$ 通りある．

（i）　赤玉 2 個，白玉 2 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{15\cdot10}{11\cdot10\cdot3}=\boldsymbol{\frac{5}{11}}$$

23-SMRi-i_ko-kakunin : 2023/09/02 (16:14)

(ii) 余事象は赤玉を 1 個も取り出さないことであり，その確率は $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{11\cdot10\cdot3}=\dfrac{1}{66}$ であるから，求める確率は $1-\dfrac{1}{66}=\boldsymbol{\dfrac{65}{66}}$ である．

(2) 取り出す玉の組合せは ${}_n\mathrm{C}_{20}$ 通りある．n 個の白玉のうち，40 個にしるしをつけて箱に戻すとき，しるしのついた玉を 3 個，しるしがついていない玉を 17 個取り出すためには，$n\geqq57$ でなくてはいけない．ゆえに，$40\leqq n\leqq56$ のとき，$L(n)=0$ である．$n\geqq57$ のとき

$$L(n)=\frac{{}_{40}\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-40}\mathrm{C}_{17}}{{}_n\mathrm{C}_{20}}={}_{40}\mathrm{C}_3\cdot\frac{\dfrac{(n-40)!}{(n-57)!17!}}{\dfrac{n!}{(n-20)!20!}}$$

$$={}_{40}\mathrm{C}_3\cdot\frac{20!}{17!}\cdot\frac{(n-40)!(n-20)!}{n!(n-57)!}$$

$$\frac{L(n+1)}{L(n)}=\frac{\dfrac{(n-39)!(n-19)!}{(n+1)!(n-56)!}}{\dfrac{(n-40)!(n-20)!}{n!(n-57)!}}$$

$$=\frac{(n-19)(n-39)}{(n+1)(n-56)}$$

である．ここで，

$$\frac{L(n+1)}{L(n)}-1=\frac{(n-19)(n-39)}{(n+1)(n-56)}-1$$

$$=\frac{(n^2-58n+19\cdot39)-(n^2-55n-56)}{(n+1)(n-56)}$$

$$\frac{L(n+1)-L(n)}{L(n)}=\frac{-3n+797}{(n+1)(n-56)}$$

であるから，n は自然数であることも合わせると

$57\leqq n\leqq265$ のとき，$L(n)<L(n+1)$

$n\geqq266$ のとき，$L(n)>L(n+1)$

となる．

$L(40)=L(41)=\cdots=L(56)=0$

$L(57)<L(58)<\cdots<L(266)$

$L(266)>L(267)>\cdots$

となり，$L(n)$ を最大にする n は **266** である．

要の分析　昨年と比べて，かなりヘヴィーな出題となった．**2** の注を読むこと．

（塩崎，中邨，安田亨）