聖マリアンナ医科大学・医学部

試験日　2023 年 1 月 24 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1） 関数 $f(x)=3^{2x+1}+3^{-2x+1}-20(3^x+3^{-x})+10$ の最小値は $\boxed{}$ で，このときの x の値は $x=\boxed{}$ または $x=\boxed{}$ となる．

（2） 座標平面上を運動する点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として，

$$\begin{cases} x=e^{-t}\cos\dfrac{\pi t}{2} \\ y=e^{-t}\sin\dfrac{\pi t}{2} \end{cases}$$

で表されるとき，点 P の速さは $\dfrac{e^{-t}}{2}\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であり，点 P が時刻 $t=0$ から $t=\boxed{}$ までの間に動く道のりは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{4}$ である．

2 聖さん，マリさんが常用対数表を見て話し合っている．次の会話文の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ヘ}}$ にあてはまる適切な数を 0～9 から選択し解答用紙の所定の欄に記入せよ．

$\log_{10}1.2$	$\log_{10}1.3$	$\log_{10}1.4$	$\log_{10}1.5$	$\log_{10}1.6$	$\log_{10}1.7$
0.0792	0.1139	0.1461	0.1761	0.2041	0.2304
$\log_{10}1.8$	$\log_{10}1.9$	$\log_{10}2.0$	$\log_{10}5.2$	$\log_{10}7.0$	
0.2553	0.2788	0.3010	0.7160	0.8451	

※ $\log_{10}x$ の値を小数第 5 位で四捨五入した値

聖　「$\log_{10}2.6$ は，

$\log_{10}2.6=\log_{10}(1.3\times 2)=\log_{10}1.3+\log_{10}2.0$ ……………… ①

と考えると 0.4149 になるね」

マリ　「ちょっと待って．

$\log_{10}2.6=\log_{10}(5.2\div 2)=\log_{10}5.2-\log_{10}2.0$ ……………… ②

と考えると 0.4150 だよ．結果が一致しないのはなぜだろう？」

聖　「何でだろうね？…表の左下に『$\log_{10}x$ の値を小数第 5 位で四捨五入した値』と書いてある．じゃあ，$\log_{10}1.3$ と $\log_{10}2.0$ の正確な値は

$0.11385\leqq\log_{10}1.3<0.11395$

$0.30\boxed{\text{アイウ}}\leqq\log_{10}2.0<0.30\boxed{\text{エオカ}}$

の範囲にあるということかな．これらを利用すると ① から $\log_{10}2.6$ の正確な値は

$0.41\boxed{\text{キク}}\leqq\log_{10}2.6<0.41\boxed{\text{ケコ}}$

の範囲にあると言えるね」

マリ　「② からは

$0.41\boxed{\text{サシ}}<\log_{10}2.6<0.41\boxed{\text{スセ}}$

だね．$\log_{10}2.6$ の正確な値は聖さんの結果との共通部分にあるので

$0.41\boxed{\text{ソタ}}<\log_{10}2.6<0.41\boxed{\text{チツ}}$

の範囲だね」

聖　「次は $2023=7\times 17^2$ にちなんで何か調べてみようよ」

マリ　「$7^{17^2}=7^{289}$ とか，やたらと大きい数を調べてみるのはどうかな？」

聖　「よし，7^{17^2} を調べよう．この巨大な数の下 2 桁は $\boxed{\text{テト}}$ だ．下 3 桁は難しいな．対数を利用すれば上 2 桁 (最高位の数とその隣の数) は求められるよね」

マリ　「対数表の $\log_{10}7.0$ の値を用いて $\log_{10}7^{17^2}=289\log_{10}7.0$ を計算すると

$289\times0.8451=244.2339$

だね．この値を用いると 7^{17^2} は $\boxed{ナニヌ}$ 桁の整数で，上２桁は $\boxed{ネノ}$ だ」

聖　「でも $\log_{10}7.0$ の正確な値の範囲を考えると，$289\log_{10}7.0$ の正確な値は

$244.21945\leqq289\log_{10}7.0<244.24835$

の範囲にあるから，7^{17^2} の上２桁は $\boxed{ネノ}$ または $\boxed{ハヒ}$ となるね．どっちが正解かな？」

マリ　「えーっと．ここにある情報だけでは結論は出なさそうだよ」

聖　「そう？電卓で答え合わせしてみようか」

マリ　「7^{289} を電卓で計算すると…エラーだね．でも $\log_{10}7.0$ なら 0.845098… と出るよ」

聖　「それなら 7^{17^2} の上２桁は $\boxed{フヘ}$ だね」

3　放物線 $y^2=2x$ を C とする．以下の設問（１），（２）の $\boxed{}$ に当てはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

（１）　C 上の２点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{9}{2},3\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{2}\right)$ での接線の交点を P とする．このとき，P の座標は $\left(\boxed{},\boxed{}\right)$ である．また，$\angle\mathrm{APB}$ の大きさを弧度法で表すと $\boxed{ア}$ である．

（２）　C 上の２点を $\mathrm{A}\left(\dfrac{a^2}{2},a\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{b^2}{2},b\right)$ とおく．ただし $a>b$ である．A，B での接線の交点を $\mathrm{P}(X,Y)$ とするとき，X と Y を a,b で表すと $X=\dfrac{\boxed{}}{2}$, $Y=\dfrac{\boxed{}}{2}$ ある．

（３）　（２）において $\angle\mathrm{APB}$ を（１）の $\boxed{ア}$ に保ったまま A，B を動かすとき，X の最小値は $\boxed{}$ となる．また，点 P の軌跡は双曲線 $\dfrac{x^2}{\boxed{}}-\dfrac{y^2}{\boxed{}}=1$ を x 軸方向に $\boxed{}$ だけ平行移動した曲線の一部である．

4　座標平面上の点 (x,y) のうち x,y がともに整数であるものを格子点と呼ぶ．（１）の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数と（１）の（ii）および（２）に対する解答を解答用紙の所定の欄に記載せよ．

（１）　原点 O および格子点 A，B を頂点とする $\triangle\mathrm{OAB}$ のうち面積が最小となるものを考える．

（ｉ）　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,b_2)$ とするとき $|a_1b_2-a_2b_1|=\boxed{}$ となる．

（ii）　平面上の点 P の位置ベクトルを，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表す．とくに P が格子点のとき，m,n は整数となることを示せ．

（２）　原点 O および格子点 A，B，C を頂点とする四角形のうち面積が最小となるものを考える．ただし各頂点における内角は 180° 未満とする．

（ｉ）　この四角形の周および内部に含まれる格子点は頂点のみであることを示せ．

（ii）　この四角形は平行四辺形であることを示せ．

1　（１）　**数学Ⅱ**【指数関数とそのグラフ】**標準**

▶解答◀　$t=3^x+3^{-x}$ とおくと，相加・相乗平均の不等式より $t\geqq2\sqrt{3^x\cdot3^{-x}}=2$ であり，等号は $3^x=3^{-x}$，すなわち $x=0$ で成立するから，t のとりうる値の範囲は $t\geqq2$ である．

$$f(x)=3(3^{2x}+3^{-2x})-20(3^x+3^{-x})+10$$
$$=3(t^2-2)-20t+10$$
$$=3t^2-20t+4=3\left(t-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{88}{3}$$

$t\geqq2$ より，$t=\dfrac{10}{3}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{88}{3}}$ をとる．このとき，

$$3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$$
$$3(3^x)^2-10\cdot3^x+3=0$$
$$(3^x-3)(3\cdot3^x-1)=0$$
$$3^x=3,\ \frac{1}{3}\qquad\therefore\quad x=\boldsymbol{\pm1}$$

（２）　**数学Ⅲ**【速度と道のり】**標準**

▶解答◀　$x'=-e^{-t}\cos\dfrac{\pi t}{2}+e^{-t}\left(-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi t}{2}\right)$

$$=-e^{-t}\left(\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)$$
$$y'=-e^{-t}\sin\frac{\pi t}{2}+e^{-t}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\right)$$
$$=-e^{-t}\left(\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\right)$$

これより，速度ベクトルを $|\vec{v}|$ とすると

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x')^2+(y')^2}$$
$$= e^{-t}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} = \boldsymbol{\frac{e^{-t}}{2}\sqrt{\pi^2+4}}$$

また，$c=\sqrt{\pi^2+4}$ とおくと，$t=T$ までに動く道のりは

$$\int_0^T |\vec{v}|\,dt = \frac{c}{2}\int_0^T e^{-t}\,dt$$
$$= \frac{c}{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^T = \frac{c}{2}(1-e^{-T})$$

であるから，これが $\frac{c}{4}$ となるとき，

$$\frac{c}{2}(1-e^{-T}) = \frac{c}{4}$$
$$1-e^{-T} = \frac{1}{2}$$
$$e^{-T} = \frac{1}{2} \qquad \therefore\quad T = \mathbf{log\,2}$$

2 数学II【常用対数】標準

▶解答◀　式番号は振り直す．$\log_{10}2.0$ を小数第 5 位で四捨五入したものが 0.3010 より

$$0.30\mathbf{095} \leqq \log_{10}2.0 < 0.30\mathbf{105} \quad \cdots\cdots ①$$

である．また，

$$0.11385 \leqq \log_{10}1.3 < 0.11395 \quad \cdots\cdots ②$$

であるから，①＋② より

$$0.41\mathbf{48} \leqq \log_{10}2.6 < 0.41\mathbf{50} \quad \cdots\cdots ③$$

さらに，同様に考えると

$$0.71595 \leqq \log_{10}5.2 < 0.71605 \quad \cdots\cdots ④$$

であるから，④－① より

$$0.41\mathbf{49} < \log_{10}2.6 < 0.41\mathbf{51} \quad \cdots\cdots ⑤$$

③ と ⑤ の共通部分を考えると

$$0.41\mathbf{49} < \log_{10}2.6 < 0.41\mathbf{50}$$

となる．次に，7^{17^2} について考える．7 の累乗の下 2 桁は 07, 49, 43, 01 を周期 4 で繰り返す．ここで，$17^2 = 4\cdot72+1$ であるから，7^{17^2} の下 2 桁は **07** である．また，

$$\log_{10}7^{17^2} = 244.2339$$
$$\log_{10}1.7 = 0.2304 < 0.2339 < 0.2553 = \log_{10}1.8$$

であることから，

$$1.7\cdot10^{244} < 7^{17^2} < 1.8\cdot10^{244}$$

これより，7^{17^2} は **245** 桁の整数で，上 2 桁は **17** である．ただし，小数第 5 位で四捨五入されていることを考えると

$$244.21945 \leqq \log_{10}7^{17^2} < 244.24835$$

であることから，同様に考えると

$$1.6\cdot10^{244} < 7^{17^2} < 1.8\cdot10^{244}$$

としか言えず，上 2 桁は 17 または **16** となる．実際の電卓では $\log_{10}7.0 = 0.845098\cdots$ となることから

$$0.845098 \leqq \log_{10}7 < 0.845099$$
$$244.233322 \leqq \log_{10}7^{17^2} < 244.233611$$

であることから，やはり

$$1.7\cdot10^{244} < 7^{17^2} < 1.8\cdot10^{244}$$

が言えるから，上 2 桁は **17** で確定する．

注意　ジョン・ネイピアが考えた対数は扱いにくいものであった．ヘンリー・ブリッグスが提示した常用対数は，「小数表示による近似計算」をすることによって，大変扱いやすく，便利なものであり，航海や天体観測など，様々な現場での応用に大いに役立ち，科学の進歩に貢献した．大学へ行くと，理系ならば多くの実験が行われ，そのデータ処理で対数が出てくる．そのときに，このような「四捨五入による誤差評価」など，しない．もともと実験でのデータのバラツキがある．対数計算は，一回ではない．幾つもの数値を掛けたり割ったりするから，いちいち誤差評価をしていたら，無駄に煩雑になるだけである．特に，現代は数式処理ソフト Mathematica に放り込んで高精度の近似計算をする．Mathematica が行う計算がどれだけ誤差を含むか？など，誰も考えないだろう．この「四捨五入による誤差を考えよ」というのは，京大が入試問題で提示した考え方である．これは従来の学校教育の中で行われている対数表の見方とは違う．数学の出題関係者は京大に追随するのをやめるべきである．京大が始めた奇妙な問題は，机上の空論である．

3 数学III【放物線】標準

考え方　偏角（へんかく，偏向角度，argument の訳で，日本の教科書では複素数でのみ使われている）を使うのがよい．大体「複素数用語であり，他の分野では使わない」と思っているのがおかしいだろう．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の偏角とは，A を始点，B を終点とするベクトルを出し，A から右へ線分を引いて，そこから AB に向かって測る角である．左回りを正，右回りを負の角とし，**一般角で測る**．一般角というのは 1 つの角を α_0, β_0 とし，$\alpha=\alpha_0+2m\pi$, $\beta=\beta_0+2n\pi$（m, n は整数）として考え，ただし $\alpha-\beta=\angle\mathrm{BPA}$ となるような整数 m, n の範囲で考える．

▶解答◀　(1)　$x=\frac{y^2}{2}$ を y で微分すると，$\frac{dx}{dy}=y$ となるから，$y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}$ である．

A における接線 l_A の方程式は

$$y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right)+3$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$$

B における接線 l_B の方程式は

$$y=2\left(x-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{2}$$

$$y=2x+\frac{1}{4}$$

l_A と l_B を連立すると

$$\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}=2x+\frac{1}{4}\qquad\therefore\quad x=\frac{3}{4}$$

これより，P の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{3}{4},\ \frac{7}{4}}\right)$ である．

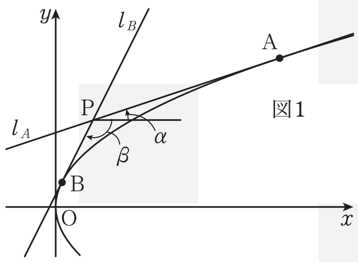


図1

PA，PB の偏角を一般角で α,β とおく．$\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=2$ である．

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{1}{3}-2}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=-1$$

これより，$\alpha-\beta=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$ である．

(2)　(1) と同様に考えると，$a\neq 0$ のとき

$$l_A: y=\frac{1}{a}\left(x-\frac{a^2}{2}\right)+a$$

$$l_A: 2ay=2x+a^2 \quad\cdots\cdots\cdots①$$

この結果は $a=0$ でも成立する．また，

$$l_B: 2by=2x+b^2 \quad\cdots\cdots\cdots②$$

である．① − ② より

$$2(a-b)y=a^2-b^2$$

$a>b$ であるから，$y=\frac{a+b}{2}$ である．これを ① に代入して

$$2a\cdot\frac{a+b}{2}=2x+a^2\qquad\therefore\quad x=\frac{ab}{2}$$

よって，$X=\boldsymbol{\frac{ab}{2}}$, $Y=\boldsymbol{\frac{a+b}{2}}$ である．

(3)　$a\neq 0, b\neq 0$ のとき，$\tan\alpha=\frac{1}{a}$, $\tan\beta=\frac{1}{b}$ より，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\dfrac{b-a}{ab+1}$ となる．この結果は $a=0$ や $b=0$ のときも正しい．$\angle\mathrm{APB}=\frac{3}{4}\pi$ となる条件は

$$\tan(\alpha-\beta)=-1\qquad\therefore\quad a-b=ab+1$$

いま，$a>b$ より，$ab+1>0$ であり，このとき，平方すると

$$(a-b)^2=(ab+1)^2$$

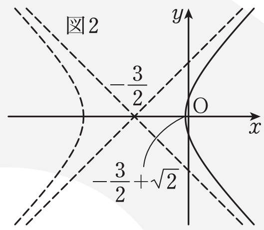
$ab=2X$, $a+b=2Y$ を代入すると

$$(2Y)^2-4\cdot 2X=(2X+1)^2$$

$$4X^2+12X-4Y^2+1=0$$

$$\frac{\left(X+\frac{3}{2}\right)^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=1$$

$ab>-1$ も合わせると，これの $X>-\frac{1}{2}$ の部分である．



これより，P の軌跡は双曲線 $\boldsymbol{\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1}$ を x 軸方向に $\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$ だけ平行移動した曲線の $x>-\frac{1}{2}$ の部分であり，x 切片を考えると，図2より X の最小値は $\boldsymbol{-\frac{3}{2}+\sqrt{2}}$ である．なお，$-\frac{3}{2}+\sqrt{2}>-\frac{1}{2}$ であるから，双曲線の右の枝になる．

注意　【判別式はとらないの？】

私が高校生のとき，Z 会のパンフレットを取り寄せたら「数学は高い知識に立つと見通しがよくなるから大学の教科書を読め」と書いてあった．土師政雄先生という方が書かれていた．「高校の教科書に載っていないことは使ったらいかん」などという心の狭いことが書いてないのが素晴らしかった．大いなるエンジンとなった．英語と国語は平均点の半分，数学は平均点の少し上という，低レベルな少年は，それを信じて，大学の教科書や，海外の書籍を読み始めた．受験雑誌「大学への数学」の増刊号に熱中し，勉強を始めて 1 ヶ月で数学は学年一番になり，やがて他科目も成績を上げていった．

$a\neq 0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ の解を α,β として，「$D=a^2(\alpha-\beta)^2$ を ax^2+bx+c の判別式」という．高校では $D=b^2-4ac$ を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式と習うが，正しくは上の定義である．高校教科書の定義と，本当の定義が違っていることは，私は，高校時代に知っていた．勿論 2 つの定義は一致する．

$a \neq 0$ のとき，$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α, β, γ として $D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ を 3 次式 ax^3+bx^2+cx+d の判別式という．
$D=b^2c^2-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2+18abcd$ となる．

解答で $D>0$ に相等することを書いていないが，それは必要ないのかと，思う人がいるだろう．
$D=(a-b)^2>0$ に相等することを書かないのか？ということである．それは成立するに決まっている．なぜなら $a-b=ab+1>0$ だからである．私が採点者ならそんなことは採点の対象にはしない．別の言い方をしよう．$a-b=ab+1>0$ を同値変形した式

$$\frac{\left(X+\frac{3}{2}\right)^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=1,\ X+\frac{3}{2}>0$$

により $X+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$, $Y=\dfrac{\sqrt{2}}{\tan\theta}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とパラメータ表示される．$a-b=2X+1$, $a+b=2Y$ であるから $a=X+Y+\dfrac{1}{2}$，$b=Y-X$ は実数に決まっている．和 $a+b$ と差 $a-b$ が実数なら a, b は実数である．

4 数学B【ベクトルと図形 (平面)】標 準

▶解答◀ (1) (i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1, b_2)$ のとき

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$$

である．$\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$ は整数である．三角形 OAB ができるときを考えるから $\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$ は 1 以上の整数であり，$\triangle\mathrm{OAB} \geqq \dfrac{1}{2}$ である．例えば A(1, 0)，B(0, 1) で $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}$ は実現可能である．$\boldsymbol{\left|a_1b_2-a_2b_1\right|=1}$

(ii) $a_1b_2-a_2b_1=\pm 1$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m(a_1, a_2)+n(b_1, b_2)$$
$$=(ma_1+nb_1, ma_2+nb_2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p, q)$ (p, q は整数) とおくと，

$$ma_1+nb_1=p \quad \cdots\cdots①$$
$$ma_2+nb_2=q \quad \cdots\cdots②$$

$①\times b_2-②\times b_1$ より

$$(a_1b_2-a_2b_1)m=pb_2-qb_1$$

$②\times a_1-①\times a_2$ より

$$(a_1b_2-a_2b_1)n=qa_1-pa_2$$

$a_1b_2-a_2b_1=\pm 1$ より

$$m=\frac{pb_2-qb_1}{\pm 1},\ n=\frac{qa_1-pa_2}{\pm 1}$$

はともに整数になる．

(2) (i) 四角形 OABC を F とする．F の面積を S とする．

$$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC} \geqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

であり，たとえば A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) のように，$S=1$ になる図形は存在するから，$S=1$ になるときを考える．

(ア) 図 1 を参照せよ．F の内部に格子点が存在すると仮定する．それを P として，

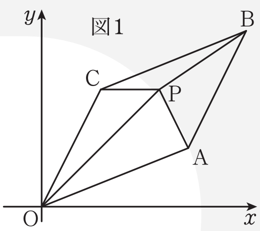
$$1=S=\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PBC}+\triangle\mathrm{PCO}+\triangle\mathrm{POA}$$
$$\geqq \frac{1}{2}\cdot 4=2$$

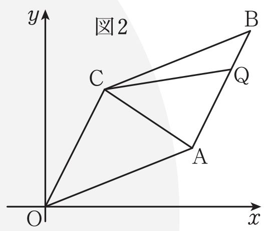
となり矛盾する．ゆえに F の内部に格子点は存在しない．

(イ) 図 2 を参照せよ．F の辺上の頂点以外に格子点が存在すると仮定する．それを Q として，たとえば Q が辺 AB (両端を除く) 上にあるとする．

$$1=S=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{CAQ}+\triangle\mathrm{CQB} \geqq \frac{1}{2}\cdot 3$$

となり矛盾する．Q が他の辺上にあっても同様である．ゆえに F の周上に頂点以外の格子点は存在しない．

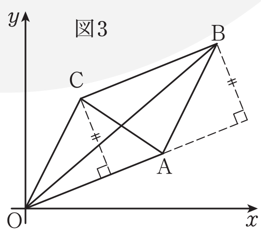




(ii) 図 3 を参照せよ．$S=1$ のとき，

$$1=S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC} \geqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

で，等号が成立するから $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}$ である．同様に $\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}$ である．$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}$ であり，直線 OA と B の距離，直線 OA と C の距離を考え，それらは等しい．よって BC は OA と平行である．同様に AB と OC は平行である．ゆえに F は平行四辺形である．



要の分析 **4** は論証の問題だが，意図が汲みにくく難しいだろう．**1**，**2** は典型問題なので落とせない．差がつくとすれば **3** の後半だろう．問題文が会話形式なのは勘弁してほしい．

（塩崎，染矢，安田亨）