福岡大学・医学部

試験日　2023 年 2 月 2 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1（1） 2 次方程式 $x^2+2kx+4k-3=0$ は 2 つの実数解 α，β をもつとする．ただし，$\alpha<\beta$ とする．このとき，k の値の範囲は $\boxed{}$ である．また，$\beta \leqq k$ となるような k の値の範囲は $\boxed{}$ である．

（2） 3 個のさいころ A，B，C を 1 回ずつ投げる．さいころ A の出た目が 4 であり，かつ 3 個のさいころの出た目の最大値が 4 である確率は $\boxed{}$ である．3 個のさいころの出た目の最大値が 4 であるときに，さいころ A の出た目が 4 である確率は $\boxed{}$ である．

（3） 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(9x^2+36x+34)^n$ が収束するような x の値の範囲は $\boxed{}$ であり，この無限級数の和が 2 のとき，x の値は $\boxed{}$ である．

2（1） 3 次方程式 $8x^3-8x^2+1=0$ の解は $x=\boxed{}$ である．また，不等式

$(\log_x 2)\left|\log_2|x-1|\right|+\left|\log_x 8\right|-2 \geqq 0$ の解は $\boxed{}$ である．

（2） 座標空間において，3 点 A(1, 3, 0)，B(0, −1, −3)，C(2, 4, 1) が定める平面を α とし，D(0, 6, −3) とする．このとき，α に関して D と対称な点 E の座標は $\boxed{}$ である．ただし，E が α に関して D と対称であるとは，直線 DE は α に垂直であり，かつ線分 DE の中点は α 上にあることをいう．また，F(1, 1, 1) とするとき，α 上の点 P で，2 線分 DP，FP の長さの和 DP＋FP を最小にする P の座標は $\boxed{}$ である．

3 関数 $f(x)=4\tan^3 x-9\tan^2 x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x=a$ で極大であるとする．座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ の変曲点の座標を $(b,\ f(b))$ とする．このとき，次の問に答えよ．

（1） 実数 a，b の値を求めよ．

（2） 座標平面上で，連立不等式 $\begin{cases} f(x) \leqq y \leqq 0 \\ a \leqq x \leqq b \end{cases}$ の表す領域の面積を求めよ．

1

（1） 数学Ⅰ【2 次方程式の解の配置】標 準

▶解答◀ $x^2+2kx+4k-3=0$ の判別式 D について

$$\frac{D}{4}=k^2-4k+3>0$$

$$(k-1)(k-3)>0$$

$$\boldsymbol{k<1,\ 3<k} \ \cdots\cdots\cdots ①$$

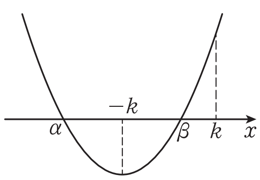
$f(x)=x^2+2kx+4k-3$ とおく．

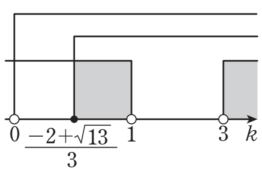
$\beta \leqq k$ になるのは 2 解とも $x \leqq k$ にあるときで，

$D>0$，軸：$-k<k$，$f(k)=3k^2+4k-3 \geqq 0$

$-k<k$ より $k>0$ であるから

$$\boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{13}}{3} \leqq k<1,\ 3<k}$$





なお $\dfrac{-2-\sqrt{13}}{3}<0<\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}<\dfrac{-2+4}{3}<1$ である．

（2） 数学A【条件付き確率】標 準

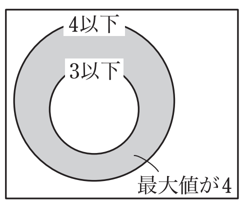
▶解答◀ さいころ A の出る目が 4 であり，3 個のさいころの出る目の最大値が 4 となるのは，さいころ B，C の出る目が 4 以下であるときであり，その確率は $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4}{6}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{2}{27}}$ である．

さいころ A の出る目が 4 となる事象を E，3 個のさいころの出る目の最大値が 4 となる事象を F とおく．$P(F)$ は，3 つのさいころの出る目が 4 以下となる確率から，3 つのさいころの出る目が 3 以下となる確率を引いて

$$P(F)=\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{6^3}$$

$P(E \cap F)=\dfrac{2}{27}$ であるから，求める確率 $P_F(E)$ は

$$P_F(E)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{2}{27}\cdot\frac{6^3}{37}=\boldsymbol{\frac{16}{37}}$$



（3） 数学Ⅲ【無限等比級数】標 準

▶解答◀　無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(9x^2+36x+34)^n$ が収束する条件は

$$-1<9x^2+36x+34<1$$

である．$-1<9x^2+36x+34$ から

$$9x^2+36x+35>0$$

$$(3x+5)(3x+7)>0$$

$$x<-\frac{7}{3},\ -\frac{5}{3}<x$$

$9x^2+36x+34<1$ から

$$3x^2+12x+11<0$$

$$\frac{-6-\sqrt{3}}{3}<x<\frac{-6+\sqrt{3}}{3}$$

x の値の範囲は

$$\boldsymbol{-2-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<-\frac{7}{3},\ -\frac{5}{3}<x<-2+\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(9x^2+36x+34)^n=2$ のとき，

$$\frac{9x^2+36x+34}{1-(9x^2+36x+34)}=2$$

$$9x^2+36x+34=\frac{2}{3}$$

$$27x^2+108x+100=0$$

$$x=\frac{-54\pm\sqrt{54^2-2700}}{27}$$

$$=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-300}}{9}=\boldsymbol{-2\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}}$$

2

（1）数学Ⅱ【指数・対数不等式】標準

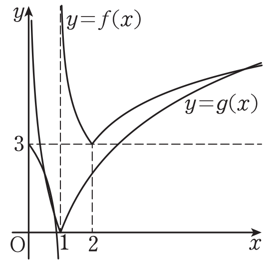
考え方

$f(x)=\dfrac{|\log_2 x|}{\log_2 x}\bigl|\log_2|x-1|\bigr|+3$,

$g(x)=2|\log_2 x|$ とおく．不等式は $f(x)\geqq g(x)$ となる．曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は図のようになる．この交点の様子から

$$0<x<1,\ 1<x\leqq 2,\ 2<x$$

の 3 通りの場合分けは必要であることがわかる．あとはいかに要領よく，混乱しないように記述するかである．



▶解答◀　$8x^3-8x^2+1=0$

$$(2x-1)(4x^2-2x-1)=0$$

$$x=\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}}$$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ とおく．

$\beta<0<\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ である．

底の条件，真数条件から $x>0$，$x\neq 1$ であり，与えられた不等式を変形すると

$$\frac{1}{\log_2 x}\bigl|\log_2|x-1|\bigr|+\left|\frac{\log_2 8}{\log_2 x}\right|-2\geqq 0$$

となり 2 を右辺に移項し，$|\log_2 x|$ をかけると

$$\frac{|\log_2 x|}{\log_2 x}\bigl|\log_2|x-1|\bigr|+3\geqq 2|\log_2 x|$$

となる．$f(x)=\dfrac{|\log_2 x|}{\log_2 x}\bigl|\log_2|x-1|\bigr|+3$,

$g(x)=2|\log_2 x|$ とおく．

（ア）　$0<x<1$ のとき，$\log_2 x<0$ である．

$0<|x-1|<1$ であるから $\log_2|x-1|<0$ である．

$$f(x)=\frac{-\log_2 x}{\log_2 x}(-\log_2(1-x))+3$$

$$=\log_2(1-x)+3$$

$$g(x)=-2\log_2 x$$

$$f(x)-g(x)=\log_2(1-x)+3+2\log_2 x$$

$$=\log_2 8x^2(1-x)\geqq 0$$

$$8x^2(1-x)\geqq 1$$

$$8x^3-8x^2+1\leqq 0$$

$$(2x-1)(4x^2-2x-1)\leqq 0$$

$$(2x-1)\cdot 4(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0$$

$x-\beta>0$ であるから $(2x-1)(x-\alpha)\leqq 0$

$$\frac{1}{2}\leqq x\leqq\alpha$$

（イ）　$1<x$ のとき，$\log_2 x>0$ である．

$$f(x)=|\log_2(x-1)|+3\geqq 3$$

$g(x)=2\log_2 x$ であるから $1<x\leqq 2$ のときは

$g(x)\leqq 2<f(x)$ となり，$g(x)\leqq f(x)$ は成り立つ．

$x>2$ のとき $x-1>1$ だから $\log_2(x-1)>0$ であり

$$f(x)=\log_2(x-1)+3=\log_2 8(x-1)$$

$$f(x)-g(x)=\log_2 8(x-1)-\log_2 x^2\geqq 0$$

になるのは $8(x-1)\geqq x^2$ になるときで，

$$x^2-8x+8\leqq 0$$

$$4-2\sqrt{2}\leqq x\leqq 4+2\sqrt{2}$$

$x>2$ とあわせて $2<x\leqq 4+2\sqrt{2}$

$1<x\leqq 2$ とまとめて $1<x\leqq 4+2\sqrt{2}$

以上より $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$，$\boldsymbol{1<x\leqq 4+2\sqrt{2}}$

（2）数学B【平面の方程式】標準

▶解答◀　α の法線ベクトルを $\overrightarrow{n}=(a,\,b,\,c)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -4,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ 1)$ と $\vec{n}$ は垂直であるから

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-a-4b-3c=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=a+b+c=0 \quad \cdots\cdots②$$

①＋②×3 より $2a-b=0$　　∴　$b=2a$

①＋②×4 より $3a+c=0$　　∴　$c=-3a$

$a=1$ として，$\vec{n}=(1,\ 2,\ -3)$ とする．α は A を通るからその方程式は

$$(x-1)+2(y-3)-3z=0$$

$$x+2y-3z-7=0$$

となる．線分 DE の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\vec{n}$$

$$=(0,\ 6,\ -3)+s(1,\ 2,\ -3)$$

$$=(s,\ 6+2s,\ -3-3s)$$

とおけて，M は α 上にあるから

$$s+2(6+2s)-3(-3-3s)-7=0$$

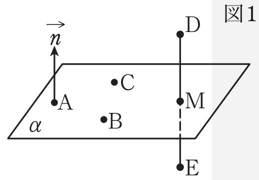
$$14s+14=0 \qquad \therefore\ s=-1$$

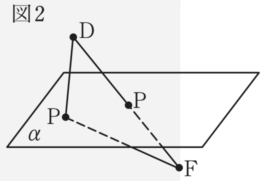
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+2s\vec{n}$$

$$=(0,\ 6,\ -3)-2\vec{n}=(-2,\ 2,\ 3)$$

点 E の座標は $\mathbf{(-2,\ 2,\ 3)}$ である．

図1　図2





$$\mathrm{DP}+\mathrm{PF}\geqq\mathrm{DF}$$

等号は D，P，F の順で一直線上にあるときに成り立つ．直線 DF 上の点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおけて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t(1,\ 1,\ 1)+(1-t)(0,\ 6,\ -3)$$

$$=(t,\ 6-5t,\ -3+4t)$$

とおける．P が α 上にあるとき

$$t+2(6-5t)-3(-3+4t)-7=0$$

$-21t+14=0$ で $t=\dfrac{2}{3}$ となる．$0<t<1$ であるから確かに D，P，F の順に一直線上にあり，D，F が α に関して反対の側にあることが示された．

点 P の座標は $\left(\mathbf{\dfrac{2}{3},\ \dfrac{8}{3},\ -\dfrac{1}{3}}\right)$ である．

注意　【正領域と負領域】

平面 $ax+by+cz+d=0$ 上の点 $\mathrm{P_0}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から，法線ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ と同じ方向に離れた点 P について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}$$

$$=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(a,\ b,\ c)$$

$$=(x_0+ta,\ y_0+tb,\ z_0+tc)$$

とおける．ただし

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0 \text{ かつ } t>0$$

である．

$$f(x,\ y,\ z)=ax+by+cz+d$$

として，

$$f(x_0+ta,\ y_0+tb,\ z_0+tc)$$

$$=a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c(z_0+tc)+d$$

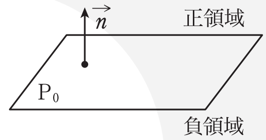
$$=ax_0+by_0+cz_0+d+t(a^2+b^2+c^2)$$

$$=t(a^2+b^2+c^2)>0$$

となる．このとき P は平面 $ax+by+cz+d=0$ に関して正領域にあるという．

同様に $f(x,\ y,\ z)<0$ を負領域という．

なお，「上側，下側」という概念ではないから注意せよ．



$f(x,\ y,\ z)=x+2y-3z-7$ とおくと

$$f(0,\ 6,\ -3)=12+9-7>0$$

$$f(1,\ 1,\ 1)=1+2-3-7<0$$

であり，D は正領域，F は負領域にある．しかし，今，このことは必要ではない．解答の計算で t を求め，もし，$t<0$，$t>1$ になれば，D，F は同じ側にあることになる．だから，正領域，負領域を知らずとも答えは出せる．

3　数学Ⅲ【面積】標準

▶解答◀　（1）

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

であるが，これを

$$t'=\frac{1}{c^2}=1+t^2$$

と略記する．$f(x)=4t^3-9t^2$

$$f'(x)=12t^2t'-18tt'=6(2t^2-3t)(1+t^2)$$

$$=6t(2t-3)(1+t^2)$$

$$f''(x)=6\{(4t-3)t'(1+t^2)+(2t^2-3t)\cdot 2tt'\}$$

$$=6(4t^3-3t^2+4t-3+4t^3-6t^2)t'$$

$$=6(8t^3-9t^2+4t-3)(1+t^2)$$

$$= 6(t-1)(8t^2-t+3)(1+t^2)$$

$8t^2-t+3>0$ である．

$\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

$$a = \mathbf{0},\ b = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

（**2**）　求める面積を S，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx\ (n \geqq 0)$ とおく．

$$I_{n+2}+I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(\tan x)'\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$

$$= \Big[-\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log 2$$

$$I_3 = \frac{1}{2}-I_1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2$$

$$I_0 = \frac{\pi}{4}$$

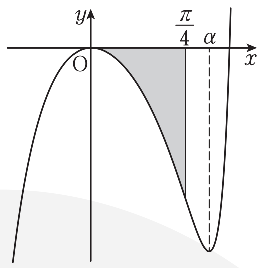
$$I_2 = 1-I_0 = 1-\frac{\pi}{4}$$

$$S = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$

$$= -(4I_3-9I_2)$$

$$= -4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2\right)+9\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{7+2\log 2-\frac{9}{4}\pi}$$



注意　**【n 乗の積分】**

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$，$\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ などは部分積分であるが I_n だけは $I_{n+2}+I_n$ で特殊基本関数の積分 $\tan^n x(\tan x)'$ にもちこむのが定石である．

要の分析　大問 3 題の構成は変わらない．標準的な問題が出題される．**2** は，煩雑な計算や空間における点の位置関係の把握が必要とされる問題であり，手がかかったと思われる．

（中路，池見，平尾，坂本賀，前田拓，安田亨）