藤田医科大学・後期

試験日　2023 年 3 月 2 日　時間 100 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （１） 整数全体を全体集合 U とし，U の部分集合 A, B を $A=\{1, 4, a^3+33, a+6\}$, $B=\{2, 7, a^3+30, a^2+a\}$ とする．$n(A\cap B)=2$ であるとき $a=\square$ であり，$n(\overline{A\cup\overline{B}})=\square$, $n\big((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\big)=\square$ である．ただし，$n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す．

（２） 三角形 ABC の辺 AB を 3 : 2 に内分する点を P，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q，また AQ と CP の交点を R とするとき，$\dfrac{\triangle \mathrm{RBC}}{\triangle \mathrm{RAC}}=\dfrac{\square}{\square}$, $\dfrac{\triangle \mathrm{RAC}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{\square}{\square}$ である．

（３） 5 個の値からなるデータ $3\cos a$, $2\sin 2a$, $-2\sin 2a$, $2\cos a$, 0 の分散の最小値は $\square$，最大値は $\dfrac{\square}{\square}$ である．ただし a は実数とする．

（４） $z=\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ のとき $z^7=\square$, $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\square$ であり，$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=\square$ である．ただし i は虚数単位とする．

（５） $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$ のとき，$\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^2=\square$ である．

（６） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\log(4x+1)}{x^2}=\square$ である．

（７） $f(x)=2x^4-4(1+a)x^3+12ax^2+16ax+5$ が極大値を持つような正の実数 a の範囲は $\square<a<\dfrac{\square}{\square}$, $\square<a$ である．

（８） medicine に使われている 6 種類 8 文字のうち 4 文字を使って作ることができる異なる文字列の数は $\square$ である．

（９） $2^{2023}(2^{2023}-1)$ の 1 の位の数字は $\square$ である．

（10） $A=(16^{16})^{16}$, $B=2^{(4^8)}$ とするとき，$\log_2(\log_2 A)-\log_2(\log_2 B)=\square$ である．

（11） $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 dx=\frac{\square}{\square}\pi$ である．

2 O を原点とする xy 平面上に点 A(2, 0)，点 B$(1, \sqrt{3})$，および実数 s, t と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定まる点 P がある．s, t が（１）〜（３）のそれぞれの条件を満たす場合について，点 P がとりうる範囲を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ．

（１） $2\leqq s+2t\leqq 6,\ 0\leqq s,\ 0\leqq t$

（２） $1\leqq |s|+|t|\leqq 6$

（３） $s^2+(s+t)^2\leqq 6$

3 O を原点とする xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{2}{3}(1-x^{\frac{3}{2}})\ (x\geqq 0)$ 上に点 A(1, 0), B$\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ をとり，伸び縮みしない糸を曲線 AB，線分 BO 上に緩まないように沿わせる．

この糸は，一端を点 A に固定して，曲線 AB に沿わせて点 B で折り，y 軸の下方向にまっすぐに沿わせると，ちょうど点 O に達する長さである．点 A に固定した糸の端とは反対側の端を点 P とする．

はじめ点 O に点 P があり，糸が緩まないように点 P を時計回りに動かしていくと，途中まで点 P は点 B を中心とし線分 OB の長さを半径とする円の周上にある．その後，糸は曲線 AB から徐々に離れはじめる．糸のうち曲線 AB 上の部分の点 P に近い側の点を点 Q とする．点 P は点 O から動き始めてから後，点 Q が点 A に達するまで動く．次の問いに答えよ．

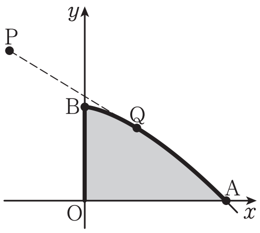
（１） 糸の長さを求めよ．

（２） 点 Q の x 座標を t とする．$0<t<1$ のとき，点 P が曲線 AB の点 Q における接線上にあることに注意

して，点 P の座標を t を用いて表せ．

（3） 点 O を起点とする点 P の軌跡を図示せよ．

（4） 糸が通過した部分の面積を求めよ．



1（1） **数学Ⅰ**【集合の雑題】**標準**

▶解答◀ 整数を全体集合とするから，a は整数である．$a^3+33=2, 7$ を満たす a は存在しない．また $a^3+33>a^3+30$ である．したがって $n(A\cap B)=2$ のとき

$$a^3+33=a^2+a$$

$$a^3-a^2-a+33=0$$

$$(a+3)(a^2-4a+11)=0$$

$a^2-4a+11=(a-2)^2+7>0$ であるから $\boldsymbol{a=-3}$ である．

このとき，$A=\{1, 3, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 6, 7\}$ であるから $n(A\cap B)=2$ を満たす．

$\overline{A\cup\overline{B}}=\overline{A}\cap B=\{2, 7\}$ より $\boldsymbol{n\left(\overline{A\cup\overline{B}}\right)=2}$ である．

$$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cup B$$

$$=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

より $\boldsymbol{n\big((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\big)=6}$ である．

図1

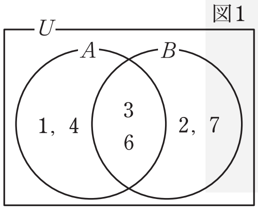
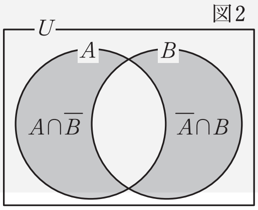


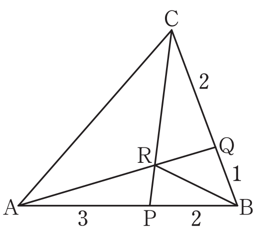
図2



（2） **数学A**【図形の雑題】**基本**

▶解答◀ $\dfrac{\triangle\mathrm{RBC}}{\triangle\mathrm{RAC}}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ である．

$\dfrac{\triangle\mathrm{RAC}}{\triangle\mathrm{RAB}}=\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{BQ}}=2$ である．



$\triangle\mathrm{RAC}=S$ とおくと，$\triangle\mathrm{RBC}=\dfrac{2}{3}S$, $\triangle\mathrm{RAB}=\dfrac{S}{2}$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABC}=S+\frac{2}{3}S+\frac{S}{2}=\frac{13S}{6}$$

したがって $\dfrac{\triangle\mathrm{RAC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{S}{\frac{13S}{6}}=\boldsymbol{\dfrac{6}{13}}$ である．

（3） **数学Ⅱ**【加法定理とその応用】**基本**

▶解答◀ 与えられたデータの変量を x，分散を v とする．

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(3\cos a+2\sin 2a-2\sin 2a+2\cos a+0)$$

$$=\cos a$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{5}(9\cos^2 a+4\sin^2 2a+4\sin^2 2a+4\cos^2 a+0)$$

$$=\frac{1}{5}(13\cos^2 a+8\sin^2 2a)$$

$$v=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{8}{5}(\sin^2 2a+\cos^2 a)$$

$$=\frac{8}{5}(4\sin^2 a\cos^2 a+\cos^2 a)$$

$$=\frac{8}{5}(-4\cos^4 a+5\cos^2 a)$$

$$=\frac{8}{5}\cdot(-4)\left\{\left(\cos^2 a-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{25}{64}\right\}$$

$$=-\frac{32}{5}\left(\cos^2 a-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{5}{2}$$

$0\leqq\cos^2 a\leqq 1$ より v は $\cos^2 a=0$ のとき最小値 $\boldsymbol{0}$, $\cos^2 a=\dfrac{5}{8}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ をとる．

（4） **数学Ⅲ**【ド・モアブルの定理】**標準**

▶解答◀ $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ のとき $\boldsymbol{z^7=1}$ である．$z\neq 1$ であるから

$$z+z^2+\cdots+z^6=z\cdot\frac{1-z^6}{1-z}$$

$$=\frac{z-z^7}{1-z}=\frac{z-1}{1-z}=\boldsymbol{-1}$$

$x^7-1=0$ の解は

$$(z^k)^7=\left(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)^7$$

$$= \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1\ (k = 0, 1, \cdots, 6)$$

であるから $x = z^k\ (k = 0, 1, \cdots, 6)$ である.

したがって

$$x^7 - 1 = (x-1)(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$$

であり，左辺を因数分解すると

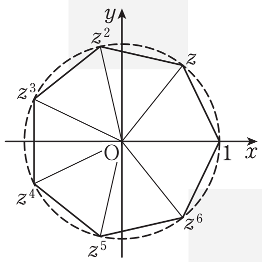
$$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$= (x-1)(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$$

左辺の多項式と右辺の多項式が一致するから，$x-1$ を除いた部分も一致する．よって

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$
$$= (x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$$

この式に $x=1$ を代入して

$$(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^6)$$
$$= 1^6+1^5+\cdots+1+1 = \mathbf{7}$$



（5） 数学Ⅰ 【多項式の計算】 基本

▶解答◀　$\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$ のとき

$\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 5$ であり，$x + \dfrac{1}{x} = 3$ となる．また

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 5$$

したがって

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$
$$= 9 \cdot 5 = \mathbf{45}$$

（6） 数学Ⅲ 【関数の極限】 基本

▶解答◀　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\log(4x+1)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{4\log(4x+1)}{4x}$$
$$= 1 \cdot 4 = \mathbf{4}$$

注意 **【公式】**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

を利用している．

（7） 数学Ⅱ 【関数の増減・極値】 標準

▶解答◀　x^4 の係数が正であるから，$f(x)$ が極大値をもつ条件は $f'(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつことで，それは $f'(x)$ の極値の積が負になることである．

$$f(x) = 2x^4 - 4(1+a)x^3 + 12ax^2 + 16ax + 5$$
$$f'(x) = 8x^3 - 12(1+a)x^2 + 24ax + 16a$$
$$= 4\{2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax + 4a\}$$

$g(x) = 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax + 4a$ とおく．

$$g'(x) = 6x^2 - 6(1+a)x + 6a$$
$$= 6(x-1)(x-a)$$

より，$a \neq 1$ のとき $g(x)$ は極値 $g(1), g(a)$ をもつ．

$$g(a) = 2a^3 - 3(1+a)a^2 + 6a^2 + 4a$$
$$= -a^3 + 3a^2 + 4a = -a(a+1)(a-4)$$
$$g(1) = 2 - 3(1+a) + 6a + 4a = 7a - 1$$

$g(a) \cdot g(1) < 0$ のときである．

$$(-a^3 + 3a^2 + 4a)(7a-1) < 0$$
$$-a(a+1)(a-4)(7a-1) < 0$$

$a > 0$ であるから

$$(a-4)(7a-1) > 0$$

これは $a \neq 1$ を満たすから，求める a の範囲は

$\mathbf{0 < a < \dfrac{1}{7},\ a > 4}$ である．

（8） 数学A 【順列】 標準

▶解答◀　medicine には，e，i が 2 文字あり，それ以外は 1 文字である．

（ア） e，i を 2 回ずつ用いるとき．

順列は $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通りある．

（イ） e を 2 回，i を 1 回以下用いるとき．

e 以外の 5 種類の文字から異なる 2 文字を用いる組合せが ${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ 通りある．選んだ 4 文字の順列が $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りある．したがって，$10 \cdot 12 = 120$ 通りある．

（ウ） i を 2 回，e を 1 回以下用いるとき．

（イ）と同様にして 120 通りある．

（エ） e，i を 2 回用いないとき．

6 文字から 4 文字を 1 列に並べる順列は

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ 通りある．

求める順列の総数は $6 + 2 \cdot 120 + 360 = \mathbf{606}$ 通りある．

（9） 数学A 【剰余による分類】 標準

▶解答◀　以下 10 を法とする．

$$2^{2023} \equiv (2^{10})^{202} \cdot 2^3 \equiv 8 \cdot 1024^{202}$$
$$\equiv 8 \cdot 4^{202} \equiv 8 \cdot 2^{404} \equiv 8 \cdot (2^{10})^{40} \cdot 2^4$$
$$\equiv 8 \cdot 16 \cdot 4^{40} \equiv 8 \cdot 2^{80} \equiv 8 \cdot (2^{10})^8$$
$$\equiv 8 \cdot 4^8 \equiv 8 \cdot 2^{16} \equiv 8 \cdot 2^{10} \cdot 2^6$$
$$\equiv 8 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 8$$

したがって

$$2^{2023}(2^{2023}-1) \equiv 8\cdot 7 \equiv 6$$

であるから一の位は **6** である．

◆別解◆　2^n の一の位を順に書くと

$$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ \cdots$$

となり，周期 4 でくり返す．

$$2023 = 4\cdot 505 + 3$$

より 2^{2023} の一の位は 8 である．したがって，求める一の位は $8\cdot 7 = 56$ より **6** である．

注意　**【合同式で書く】**

別解の内容を合同式で書くと次のようになる．法は 10 とする．

$$2^{n+4} - 2^n \equiv 2^n(2^4-1) \equiv 5\cdot 2^n$$

n は自然数であるから $5\cdot 2^n \equiv 0$ となり 2^{n+4} と 2^n の一の位は一致する．

(10)　**数学Ⅱ**【対数の計算】基本

▶解答◀　$\log_2 A = \log_2 (16^{16})^{16} = 16\log_2 16^{16}$

$$= 16\cdot 16\log_2 16 = 16\cdot 16\cdot 4$$

$$= 2^4\cdot 2^4\cdot 2^2 = 2^{10}$$

$$\log_2 B = \log_2 2^{(4^8)} = 4^8 = 2^{16}$$

したがって

$$\log_2(\log_2 A) - \log_2(\log_2 B)$$

$$= \log_2 2^{10} - \log_2 2^{16} = 10 - 16 = \mathbf{-6}$$

(11)　**数学Ⅲ**【定積分】標準

▶解答◀　$x = \tan\theta$ とおく．

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos\theta\sin\theta,\ dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 dx = \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$x : \dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$ のとき $\theta : \dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{\pi}{3}$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \mathbf{\frac{1}{12}\pi}$$

2

数学Ⅲ【楕円】標準

▶解答◀　（1）　$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} = (4,\ 0)$, $\overrightarrow{OD} = 6\overrightarrow{OA} = (12,\ 0)$, $\overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{OB} = (3,\ 3\sqrt{3})$ とおく．P のとりうる範囲は境界を含む図 1 の網目部分の領域である．

△ODE ∽ △OCB で OD : OC = 3 : 1 より，△ODE : △OCB = 9 : 1 であるから

$$\frac{9-1}{9}\triangle\mathrm{ODE} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3\sqrt{3} = \mathbf{16\sqrt{3}}$$

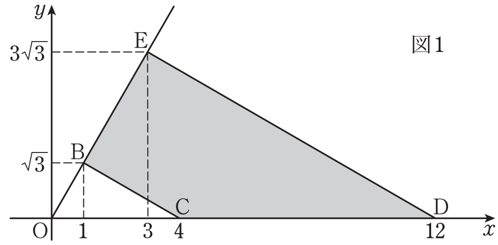


図1

（2）　C〜E は（1）と異なるものとして再び用いる．

$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = (-2,\ 0),\ \overrightarrow{OD} = 6\overrightarrow{OA} = (12,\ 0),$$

$$\overrightarrow{OE} = -6\overrightarrow{OA} = (-12,\ 0),$$

$$\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OB} = (-1,\ -\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{OG} = 6\overrightarrow{OB} = (6,\ 6\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{OH} = -6\overrightarrow{OB} = (-6,\ -6\sqrt{3})$$

とおく．P のとりうる範囲は境界を含む図 2 の網目部分の領域である．

△ABC ∽ △DGE で，AC : DE = 4 : 24 = 1 : 6 より △ABC : △DGE = 1 : 36 である．原点についての対称性から，求める面積は

$$2(\triangle\mathrm{DGE} - \triangle\mathrm{ABC}) = 2\cdot 35\triangle\mathrm{ABC}$$

$$= 2\cdot 35\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3} = \mathbf{140\sqrt{3}}$$

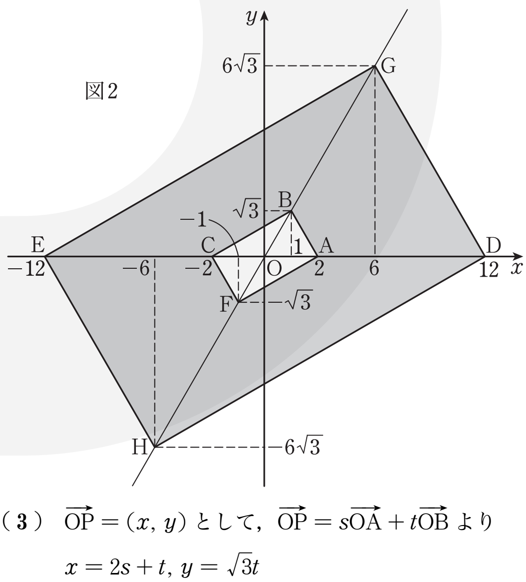


図2

（3）　$\overrightarrow{OP} = (x,\ y)$ として，$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ より

$$x = 2s + t,\ y = \sqrt{3}t$$

これを $s,\ t$ について解いて

$$s = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}x - y),\ \ t = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

これを $s^2 + (s+t)^2 \leqq 6$ に代入して

$$\frac{(\sqrt{3}x-y)^2}{12} + \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right)^2 \leqq 6$$

$$\frac{(\sqrt{3}x-y)^2}{12} + \frac{(\sqrt{3}x+y)^2}{12} \leqq 6$$

$$\frac{6x^2}{12}+\frac{2y^2}{12}\leqq 6$$

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}\leqq 1$$

P がとりうる範囲は境界を含む図 3 の網目部分の領域である．求める面積は $\pi\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6=\boldsymbol{12\sqrt{3}\pi}$

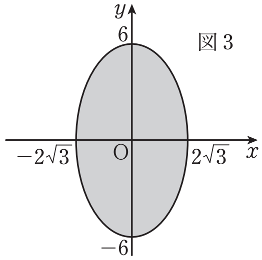


図 3

注意　**【斜交変換について】**

一般に $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の形で考える．点 X と数のペア $(m,\ n)$ を対応づける．斜交座標 $\langle\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\rangle$ 系における X の座標が $(m,\ n)$ である．

本問（1），（2）は斜交座標 $\langle\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\rangle$ 系における，$2\leqq s+2t\leqq 6,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$ の表す領域と $1\leqq|s|+|t|\leqq 6$ の表す領域の面積を求めることになる．$s+2t=2$ などは $\langle\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\rangle$ 系における直線（通常の座標系における $x+2y=2$ に相当）である．

3

数学Ⅲ【曲線の長さ】**標準**

▶解答◀　（1）　$y=\dfrac{2}{3}(1-x^{\frac{3}{2}})$ のとき $y'=-x^{\frac{1}{2}}$ である．OB と曲線の弧 BA の和を求め，求める長さは

$$\frac{2}{3}+\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{2}{3}+\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}+\left[\ \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1=\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

（2）　図 1 の状態の PQ の長さを l とする．

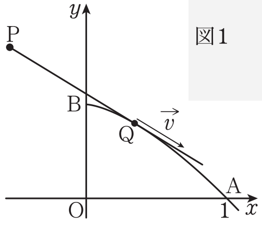


図1

l は，線分 OB の長さと曲線の弧 BQ の長さの和で

$$l=\frac{2}{3}+\int_0^t(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}+\left[\ \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^t$$

$$=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}$$

Q の座標をベクトルで $Q=\left(t,\ \dfrac{2}{3}(1-t^{\frac{3}{2}})\right)$ と表す．$\dfrac{dQ}{dt}=(1,\ -t^{\frac{1}{2}})=\vec{v}$ とおくと，$\vec{v}$ は接線の方向ベクトルで右向きである．$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は $\vec{v}$ と逆向きであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=-l\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=-\frac{\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+t}}(1,\ -t^{\frac{1}{2}})$$

$$=-\frac{2}{3}(1+t)(1,\ -t^{\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{2}{3}\left(-1-t,\ t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{2}{3}(1-t^{\frac{3}{2}})\right)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ から P の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{3}(t-2),\ \dfrac{2}{3}(\sqrt{t}+1)\right)}$ である．

（3）　$x=\dfrac{1}{3}(t-2),\ y=\dfrac{2}{3}(\sqrt{t}+1)$ とおく．$0\leqq t\leqq 1$ のとき $\dfrac{2}{3}\leqq y\leqq\dfrac{4}{3}$ である．$t=\left(\dfrac{3}{2}y-1\right)^2$ で，

$$x=\frac{3}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$$

図 2 を見よ．P の軌跡は点 $\mathrm{C}\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ を頂点とする横向きの放物線の $\dfrac{2}{3}\leqq y\leqq\dfrac{4}{3}$ の部分と四分円の弧 OC を合わせたものになる．

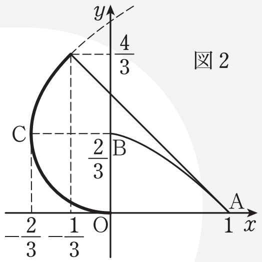


図 2

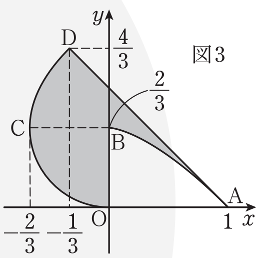


図3

（4）　$\sqrt{t}=u$ とおく．① で

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{2}{3}(-1-u^2,\ u+u^3)$$

$$\frac{d}{du}\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{2}{3}(-2u,\ 1+3u^2)$$

とする．ガウス-グリーンの定理を用いる．u が $u\sim(u+du)$ まで増加するときに線分 QP が掃過する符号付きの微小面積 dS は（上でたすき掛けをする）

$$dS=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\{(-1-u^2)(1+3u^2)-(-2u)(u+u^3)\}$$

$$dS=\frac{2}{9}(-1-2u^2-u^4)$$

t が 0 から 1 まで増加すると u も増加し Q は右に動き，QP は右まわりに回転する．よって，この符号付き面積は負になる．符号を変えて，QP が掃過する面積 S は

$$S=\int_0^1\frac{2}{9}(1+2u^2+u^4)\,du=\frac{2}{9}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{15+10+3}{15}=\frac{56}{135}$$

これに四分円 OBE の面積を加え，求める面積は，

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{56}{135}=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}+\frac{56}{135}}$$

♦別解♦　（4）**【正直に計算する】**

図 5 のように C，D，E を定める．

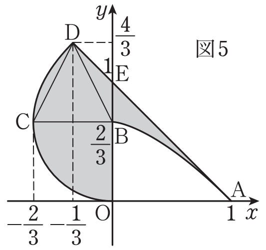


図5

図形 X の面積を［X］で表す．また，CD と ① の放物線で囲まれる図形の面積を T とする．求める面積は

［OBC］＋［BCD］＋［BDE］＋T＋［ABE］ ……②

である．

$$[\mathrm{OBC}]=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\pi}{9}$$

$$[\mathrm{BCD}]=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

$t=1$ のとき AD の方程式は $y=-x+1$，E の座標は $(0,\ 1)$ であるから

$$[\mathrm{BDE}]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$[\mathrm{ABE}]=[\mathrm{OAE}]-[\mathrm{OAB}]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1^2-\int_0^1\frac{2}{3}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left[x-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{10}$$

T の面積は 6 分の 1 公式を用いて

$$T=\frac{\frac{3}{4}}{6}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

これらを ② に代入して

$$\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{10}=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}+\frac{56}{135}}$$

注意　**【ガウス-グリーンの定理について】**

【符号付き面積】

3 点 O，A，B がこの順で左回りにあるとき正，右回りにあるとき負になるような，三角形 OAB の符号付き面積を △OAB で表す．この意味では △OAB ＝ −△OBA である．A$(a,\ b)$，B$(c,\ d)$ とおくと，△OAB ＝ $\boldsymbol{\frac{1}{2}(ad-bc)}$ である．

【証明】　a(a, b), B(c, d), OA $=r_1$, OB $=r_2$, OA，OB の偏角を θ_1, θ_2 とする．ただし，$-180^\circ<\theta_2-\theta_1<180^\circ$ になるように角を測る．

$$a=r_1\cos\theta_1,\ b=r_1\sin\theta_1$$

$$c=r_2\cos\theta_2,\ d=r_2\sin\theta_2$$

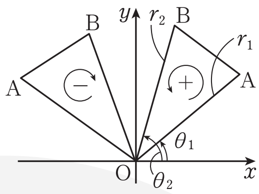
である．符号付き面積は

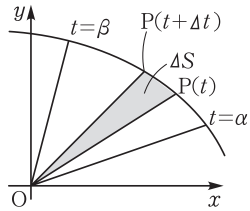
$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}r_1\cdot r_2\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}r_1\cdot r_2(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}(r_1\cos\theta_1\cdot r_2\sin\theta_2-r_1\sin\theta_1\cdot r_2\cos\theta_2)$$

$$=\frac{1}{2}(ad-bc)$$





【ガウス-グリーンの定理】

$x=x(t)$，$y=y(t)$ と媒介変数表示された曲線があり，点 $\mathrm{P}(t)=(x(t),\ y(t))$ は t の増加とともに原点 O のまわりを左回りにまわるとする．

$t=\alpha$ から $t=\beta$ まで OP の掃過する面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}dt$$

である．ただし $x(t)$, $y(t)$ は微分可能で，$x'(t)$, $y'(t)$ は連続とする．

【証明】絶対値が 0 に近い Δt に対し，t〜$t+\Delta t$ の間に掃過する面積を三角形 $\mathrm{OP}(t)\mathrm{P}(t+\Delta t)$ の面積で近似する．この符号付き面積 ΔS は

$$\Delta S=\frac{1}{2}\{x(t)y(t+\Delta t)-y(t)x(t+\Delta t)\}$$

である．

$$\Delta S=\frac{1}{2}\{x(t)(y(t+\Delta t)-y(t))$$

$$-y(t)(x(t+\Delta t)-x(t))\}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left\{x(t)\cdot\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right.$$

$$\left.-y(t)\cdot\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right\}$$

$\Delta t\to0$ として

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\{x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\}$$

よって証明された．

要の分析　問題ごとの難易度に差があるのは例年通りである．解きやすいものを見抜く力を養いたい．

（荻原，小林ゆ，遠藤，楊，安田亨）