日本大学・医学部 II 期（二次試験）

試験日　2023 年 3 月 17 日　時間 60 分　数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B（数列，ベクトル）

1 次の定積分の値を求めなさい．

（1）$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} (3x-2)^5\,dx$

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin x\cos x\,dx$

（3）$\displaystyle\int_1^{\log 2} e^{5x}\,dx$

（4）$\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2+10x+26}{x+5}\,dx$

2 曲線 $y=x^4$ 上の点列 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$, $\cdots$ を考える．ただし，$1=x_1<x_2<\cdots<x_n\cdots$ とする．原点を O として，線分 OP_1 と曲線の弧 OP_1 とで囲まれる部分の面積を S_1 とし，また，線分 OP_{n-1} と線分 OP_n と曲線の弧 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ とで囲まれる部分の面積を S_n $(n=2, 3, \cdots)$ とする．以下の問いに答えなさい．

（1）S_1 を求めなさい．

（2）$n=2, 3, \cdots$ に対して，S_n を x_n と x_{n-1} を用いて表しなさい．

（3）$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ が公比 $\dfrac{31}{32}$ の等比数列になっているとする．n が限りなく大きくなるとき，点 P_n はある点に限りなく近づくが，その点の座標を求めなさい．

3 原点 O の座標平面上に楕円 $C: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ および直線 $l: y=-2x+k$ がある．このとき，以下の問いに答えなさい．

（1）C と l が共有点をもつときの k の取り得る値の範囲を求めなさい．

（1）で求めた範囲のうち，k の最大値を Max，最小値を Min で表すこととする．また，$k=\mathrm{Max}$ となるときの共有点を A で表す．

（2）$\mathrm{Min}<k<\mathrm{Max}$ を満たす k に対して，C と l の 2 つの交点の中点を P とする．さらに，点 P を通り l に垂直な直線が C と交わる 2 点の中点を Q とする．P, Q の座標を k を用いて表しなさい．

（3）（2）の P, Q に対して，三角形 APQ を作り，その面積を S とする．S を k の式で表し，$0 \leqq k \leqq \mathrm{Max}$ の場合に S の最大値を求めなさい．

1

数学III【定積分】基本

▶解答◀（1）$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} (3x-2)^5\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(3x-2)^6\right]_0^{\frac{2}{3}}=-\frac{64}{18}=\boldsymbol{-\frac{32}{9}}$$

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin x(\sin x)'\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

（3）$\log 2=a$ とおく．$e^a=2$ である．

$$\int_1^a e^{5x}\,dx=\left[\frac{1}{5}e^{5x}\right]_1^a$$

$$=\frac{1}{5}(e^a)^5-\frac{1}{5}e^5=\boldsymbol{\frac{32}{5}-\frac{1}{5}e^5}$$

（4）$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+10x+26}{x+5}\,dx=\int_0^1 \frac{(x+5)^2+1}{x+5}\,dx$

$$=\int_0^1\left(x+5+\frac{1}{x+5}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+5x+\log|x+5|\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{11}{2}+\log\frac{6}{5}}$$

2

数学III【数列の極限】標準

▶解答◀（1）$\mathrm{Q}_n(x_n, 0)$ とおく．

$$S_1=\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1-\int_0^1 x^4\,dx$$

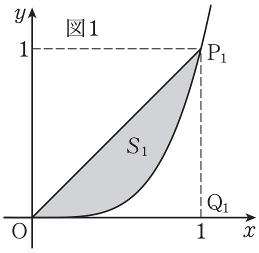
$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

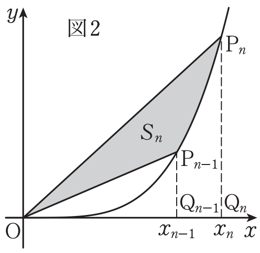
（2）$\displaystyle S_n=\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n-\triangle\mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}-\int_{x_{n-1}}^{x_n} x^4\,dx$

$$=\frac{1}{2}\cdot x_n\cdot {x_n}^4-\frac{1}{2}\cdot x_{n-1}\cdot {x_{n-1}}^4-\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x_{n-1}}^{x_n}$$

$$=\frac{1}{2}({x_n}^5-{x_{n-1}}^5)-\frac{1}{5}({x_n}^5-{x_{n-1}}^5)$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{10}(x_n{}^5-x_{n-1}{}^5)}$$





（3）　$r=\dfrac{31}{32}$ とおく．（1）より

$S_n=S_1r^{n-1}=\dfrac{3}{10}r^{n-1}$ であるから，（2）より

$$\frac{3}{10}r^{n-1}=\frac{3}{10}(x_n{}^5-x_{n-1}{}^5)$$

$$x_n{}^5-x_{n-1}{}^5=r^{n-1}$$

であり，$n\geqq 2$ に対して

$$x_n{}^5-x_1{}^5=\sum_{k=1}^{n-1}r^k$$

$$x_n{}^5=1+r\cdot\frac{1-r^{n-1}}{1-r}$$

$$x_n=\sqrt[5]{1+\frac{r}{1-r}(1-r^{n-1})}$$

$$\begin{aligned}
x_n{}^5-\cancel{x_{n-1}{}^5}&=r^{n-1}\\
\cancel{x_{n-1}{}^5}-\cancel{x_{n-2}{}^5}&=r^{n-2}\\
&\ \,\vdots\\
\cancel{x_4{}^5}-\cancel{x_3{}^5}&=r^3\\
\cancel{x_3{}^5}-\cancel{x_2{}^5}&=r^2\\
\cancel{x_2{}^5}-x_1{}^5&=r
\end{aligned}$$

$0<r<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[5]{1+\frac{r}{1-r}}=\sqrt[5]{1+31}=\sqrt[5]{32}=2$$

よって，求める座標は $\mathbf{(2,\ 16)}$

3

数学III【楕円】標 準

▶解答◀　（1）　C と l の方程式を連立し

$$4x^2+9(-2x+k)^2=36$$

$$40x^2-36kx+9(k^2-4)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$x=\frac{18k\pm\sqrt{4\cdot 9(40-k^2)}}{40}$$

$\boldsymbol{-2\sqrt{10}\leqq k\leqq 2\sqrt{10}}$ である．

（2）　P の x 座標を p とおく．C と l の 2 つの交点の x 座標は ① の 2 解であるから，解と係数の関係より

$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{36k}{40}=\frac{9}{20}k$$

$$y=-2p+k=-\frac{9}{10}k+k=\frac{1}{10}k$$

である．よって，P の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{9}{20}k,\ \frac{1}{10}k\right)}$

P を通り l に垂直な直線 m の方程式は

$$y-\frac{1}{10}k=\frac{1}{2}\left(x-\frac{9}{20}k\right)$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}k \qquad \therefore\quad x=2y+\frac{1}{4}k$$

である．C と m の方程式を連立すると

$$4\left(2y+\frac{1}{4}k\right)^2+9y^2=36$$

$$25y^2+4ky+\frac{1}{4}k^2-36=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

となる．Q の y 座標を q とおく．C と m の 2 つの交点の y 座標は ② の 2 解であるから，解と係数の関係より

$$q=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4k}{25}\right)=-\frac{2}{25}k$$

$$x=2q+\frac{1}{4}k=2\cdot\left(-\frac{2}{25}k\right)+\frac{1}{4}k=\frac{9}{100}k$$

である．よって，Q の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{9}{100}k,\ -\frac{2}{25}k\right)}$

（3）　A の x 座標を a とおく．a は $k=2\sqrt{10}$ のときの ① の重解であるから

$$a=\frac{18k}{40}=\frac{18\cdot 2\sqrt{10}}{40}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$$

$$y=-2a+2\sqrt{10}=-\frac{9\sqrt{10}}{5}+2\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

である．よって，$\mathrm{A}\left(\dfrac{9\sqrt{10}}{10},\ \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ であるから，A から $m:x-2y-\dfrac{1}{4}k=0$ の距離 h は

$$h=\frac{1}{\sqrt{1+4}}\left|\frac{9\sqrt{10}}{10}-2\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}-\frac{1}{4}k\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{1}{4}k\right|=\frac{1}{4\sqrt{5}}\left|k-2\sqrt{10}\right|$$

である．また，m の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であることから

$$\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{9}{20}k-\frac{9}{100}k\right|=\frac{9\sqrt{5}}{50}|k|$$

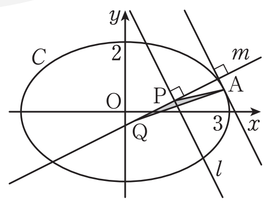
$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{5}}{50}|k|\cdot\frac{1}{4\sqrt{5}}\left|k-2\sqrt{10}\right|$$

$$=\frac{9}{400}\left|k(k-2\sqrt{10})\right|$$

であるから，$0\leqq k\leqq 2\sqrt{10}$ のとき

$$S=-\frac{9}{400}k(k-2\sqrt{10})=-\frac{9}{400}(k-\sqrt{10})^2+\frac{9}{40}$$

となり，S は $k=\sqrt{10}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{9}{40}}$ をとる．



要の分析　すべての大問が数学 III の分野からの出題であったが，**2**，**3** は数学 III の色が薄く，難問はない．

（SM，渡邉，都賀，坂本賀，前田拓，安田亨）