日本大学・医学部 II 期

試験日　2023 年 3 月 4 日　時間 60 分　数学I 数学II 数学III 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1） a を実数とする．x についての 2 次方程式 $x^2+4ax=x+4a$ が重解をもつとき，$a=\dfrac{\boxed{1}\boxed{2}}{\boxed{3}}$ であり，重解は，$x=\boxed{4}$ である．

（2） 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ と直線 $x-y-1=0$ の 2 つの交点を A, B とするとき，$\mathrm{AB}=\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}$ である．

（3） $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする．6^{20} は $\boxed{7}\boxed{8}$ 桁の整数である．

（4） a, b を実数，i を虚数単位とする．2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の 1 つが $x=-2+i$ であるとき，$a=\boxed{9}$, $b=\boxed{10}$ である．

（5） x, y が不等式 $(x-1)^2+(y+2)^2\leqq 5$ を満たすとき，$(x-4)^2+(y-4)^2$ の最小値は $\boxed{11}\boxed{12}$ である．

2 A，B の 2 人がじゃんけんを 5 回行う．ただし，あいこも 1 回と数えるものとする．

（1） あいこの回数がちょうど 3 回となる確率は $\dfrac{\boxed{13}\boxed{14}}{\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}}$ である．

（2） あいこがちょうど 3 回連続する確率は $\dfrac{\boxed{18}\boxed{19}}{\boxed{20}\boxed{21}\boxed{22}}$ である．

3 $0\leqq x\leqq\pi$ で定義された関数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ について考える．

（1） $f(x)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{23}\sqrt{\boxed{24}}}{\boxed{25}}$ であり，最小値は $-\sqrt{\boxed{26}}$ である．

（2） $f(x)$ が最小となるような x の値を x_m とするとき，$\sin 2x_m=\dfrac{\boxed{27}\boxed{28}\sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}\boxed{31}}$ である．

4 p は $0<p<1$ を満たす定数とする．△ABC の辺 AB を $p:(1-p)$ に内分する点を $\mathrm{C_1}$, 辺 BC を $p:(1-p)$ に内分する点を $\mathrm{A_1}$，辺 CA を $p:(1-p)$ に内分する点を $\mathrm{B_1}$ として $\triangle \mathrm{A_1B_1C_1}$ を作る．以下，n を自然数として，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ を $p:(1-p)$ に内分する点を C_{n+1}，辺 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ を $p:(1-p)$ に内分する点を A_{n+1}，辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$ を $p:(1-p)$ に内分する点を B_{n+1} として $\triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ を作る．△ABC の面積を S，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を S_n とする．

（1） $p=\dfrac{1}{2}$, $S=4096$ のとき，$S_5=\boxed{32}$ である．

（2） $p=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k=\dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}\left\{1-\left(\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}}\right)^n\right\}S$ である．

（3） $p=\dfrac{\boxed{37}\pm\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}\boxed{40}}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{2}{3}S$ である．

5 四面体 OABC において，辺 OA, OB, OC をそれぞれ 1 : 1, 1 : 2, 1 : 5 に内分する点を L, M, N とし，△LMN の重心を G とする．さらに，直線 OG と平面 ABC の交点を P とする．

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\boxed{45}}{\boxed{46}\boxed{47}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である．

（2） $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OG}}=\boxed{48}$ である．

（3） 四面体 OPAB，四面体 OPBC，四面体 OPCA の体積をそれぞれ V_1, V_2, V_3 とすると，$V_1:V_2:V_3=\boxed{49}:\boxed{50}:\boxed{51}$ である．ただし，最も簡単な整数比で答えること．

6　関数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2+3}$ について考える．

（1）　$f(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{52}}{\boxed{53}}$ であり，極小値は $\dfrac{\boxed{54}\,\boxed{55}}{\boxed{56}}$ である．

（2）　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{57}\log\boxed{58}+\dfrac{\sqrt{\boxed{59}}}{\boxed{60}}\pi-\boxed{61}$ である．ただし，log は自然対数を表す．

1

（1）　数学I【2 次方程式】基本

▶解答◀　$x(x+4a)=x+4a$

$$(x+4a)(x-1)=0$$

$x=1,\ -4a$ であり，重解をもつ条件は $-4a=1$，すなわち $a=-\dfrac{1}{4}$ であり，重解 $x=1$

♦別解♦　$x^2+(4a-1)x-4a=0$

$$x=\frac{1-4a\pm\sqrt{D}}{2}$$

である．ただし $D=(4a-1)^2+16a=(4a+1)^2$ である．重解になるのは $4a+1=0$ のときで $a=-\dfrac{1}{4}$ であり，重解 $x=\dfrac{1-4a}{2}=1$

（2）　数学II【円と直線】基本

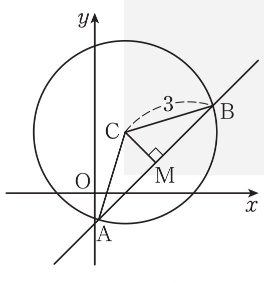
▶解答◀　円の中心を C(1, 2) とし，線分 AB の中点を M とする．C と直線 $x-y-1=0$ の距離から

$$\mathrm{CM}=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

三平方の定理を用いて

$$\mathrm{BM}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$$

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{BM}=2\sqrt{7}$$



（3）　数学II【常用対数】基本

▶解答◀　$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3$

$$=0.3010+0.4771=0.7781$$

$$\log_{10}6^{20}=20\log_{10}6$$

$$=20\cdot0.7781=15.562$$

$$4=2^2=(10^{0.301})^2=10^{0.602}$$

$$3=10^{0.4771}$$

$$3<10^{0.562}<4$$

$$3\cdot10^{15}<6^{20}<4\cdot10^{15}$$

6^{20} は **16 桁**であり最高位は 3 である．

（4）　数学II【解と係数の関係】基本

▶解答◀　$x^2+ax+b=0$ は実数係数であるから $-2+i$ が解ならば $-2-i$ も解で，解と係数の関係より

$$a=-(-2+i)-(-2-i)=4$$

$$b=(-2+i)(-2-i)=4+1=5$$

（5）　数学II【円の方程式】基本

▶解答◀　$D:(x-1)^2+(y+2)^2\leqq5$ は，円

$$C:(x-1)^2+(y+2)^2=5$$

の周と内部を表す．A(1, −2), B(4, 4) とする．D 内の点を P$(x,\ y)$ とする．

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}\geqq\mathrm{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(4+2)^2}=3\sqrt{5}$$

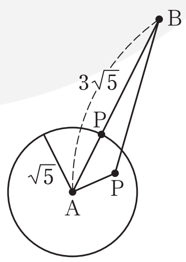
$$\mathrm{BP}\geqq\mathrm{AB}-\mathrm{AP}\geqq3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

$$\mathrm{BP}\geqq2\sqrt{5}$$

等号は A, P, B がこの順に一直線上にあり，P が C の周上にあるときに成り立つ．

$$(x-4)^2+(y-4)^2=\mathrm{BP}^2\geqq(2\sqrt{5})^2=20$$

求める最小値は **20**



注意　最近は三角不等式を用いて論証することができない人が多い．

2

数学A【独立試行・反復試行の確率】標準

▶解答◀　（1）　2 人が 1 回じゃんけんをするとき，あいこになるのは

(A, B) = (グー, グー), (チョキ, チョキ), (パー, パー)

の3通りあるから，あいことなる確率は

$$\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$$

である．よって，5回中ちょうど3回あいことなる確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=10\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{2^2}{3^2}=\boldsymbol{\frac{40}{243}}$$

（2） あいこを○，あいこでないことを×，どちらでもよいことを △ とする．あいこがちょうど3回連続するのは

○○○×△

×○○○×

△×○○○

となるときである．求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{12+4}{3^5}=\boldsymbol{\frac{16}{243}}$$

3

数学II【加法定理とその応用】標準

▶解答◀ （1） $f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}$

$$+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+2\cos x\cos\frac{\pi}{6}-2\sin x\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sqrt{3}\cos x-\sin x$$

$$=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}\cos x-\sin x)$$

$$=\frac{\sqrt{28}}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\cos x+\frac{-1}{\sqrt{28}}\sin x\right)$$

$$=\sqrt{7}\cos(x-\alpha)$$

α は $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, $\sin\alpha=\frac{-1}{2\sqrt{7}}$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ を満たす角である．$x=0$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ をとる．$x-\alpha=\pi$ で最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{7}}$ をとる．図の太線は点 $\mathrm{P}(\cos x, \sin x)$ の存在範囲で，α との開きが一番小さいところ $x=0$ で最大，一番開くとき $x-\alpha=\pi$ で最小になる．

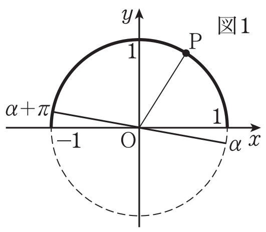


図1

（2） $x_m=\alpha+\pi$ であるから

$$\sin 2x_m=\sin(2\alpha+2\pi)=\sin 2\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{-3\sqrt{3}}{4\cdot 7}=\boldsymbol{-\frac{3\sqrt{3}}{14}}$$

◆別解◆ sin でも合成しておく．

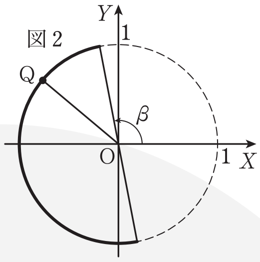
（1） $f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

$$=\frac{\sqrt{28}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{28}}\sin x+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{7}\sin(x+\beta)$$

β は $\cos\beta=-\frac{1}{2\sqrt{7}}$，$\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ を満たす角である．

図2



$0\leqq x\leqq\pi$ より $\beta\leqq x+\beta\leqq\pi+\beta$ である．図2の太線は $\mathrm{Q}(\cos(x+\beta), \sin(x+\beta))$ の存在範囲である．$f(x)$ が最大となるのは $x+\beta=\beta$ のときで，$x=0$ である．最大値は $f(0)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

また，$f(x)$ が最小となるのは $x+\beta=\frac{3}{2}\pi$ のときで，最小値は $\boldsymbol{-\sqrt{7}}$

（2） $x_m=\frac{3}{2}\pi-\beta$ であるから

$$\sin 2x_m=\sin(3\pi-2\beta)$$

$$=\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\boldsymbol{-\frac{3\sqrt{3}}{14}}$$

4

数学III【無限等比級数】標準

▶解答◀ （1） $S=S_0$ とおくと，$n\geqq 0$ に対して

$$S_{n+1}=\triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$$

$$=\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n-\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$$

$$-\triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}-\triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_n$$

$$=S_n-p(1-p)S_n-p(1-p)S_n-p(1-p)S_n$$

$$=(3p^2-3p+1)S_n$$

である．$3p^2-3p+1=r$ とおくと，$S_{n+1}=rS_n$ より

$$S_n=r^nS_0=r^nS$$

となる．

$p=\frac{1}{2}$, $S=4096=2^{12}$ のとき

$$r=3\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}$$

であるから

$$S_5=\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot 2^{12}=\frac{4^6}{4^5}=\boldsymbol{4}$$

（**2**）$p=\frac{1}{3}$ のとき

$$r=3\cdot\frac{1}{9}-3\cdot\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k S$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}S=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}S}$$

（**3**）$r=3\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ より，$0<p<1$ のとき $\frac{1}{4}<r<1$ であるから，無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=rS\cdot\frac{1}{1-r}$$

である．これが $\frac{2}{3}S$ と一致するのは

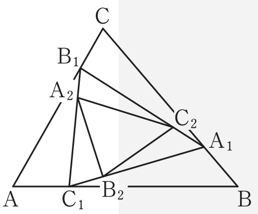
$$\frac{r}{1-r}=\frac{2}{3}$$

のときであり $r=\frac{2}{5}$

$$3p^2-3p+1=\frac{2}{5}$$

$$5p^2-5p+1=0 \qquad \therefore \quad p=\boldsymbol{\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}}$$

これは $0<p<1$ を満たす．



5

数学B【ベクトルと図形(空間)】標 準

▶解答◀ （**1**）$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$ であるから，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\boldsymbol{\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{18}\overrightarrow{OC}}$$

（**2**）P は直線 OG 上の点であるから

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}s\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}s\overrightarrow{OB}+\frac{1}{18}s\overrightarrow{OC}$$

と表せて，P は平面 ABC 上にあるから

$$\frac{1}{6}s+\frac{1}{9}s+\frac{1}{18}s=1 \qquad \therefore \quad s=3$$

である．よって

$$\frac{OP}{OG}=s=\boldsymbol{3}$$

（**3**）平面 ABC を底面として，高さを h とおくと

$$V_1:V_2:V_3=\frac{h}{3}\triangle PAB:\frac{h}{3}\triangle PBC:\frac{h}{3}\triangle PCA$$

$$=\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA$$

である．（2）より

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO})$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

となる．図 2 を見よ．△ABC と △PCA について，辺 CA を底辺とすれば高さの比は $1:\frac{1}{3}$ であるから，$\triangle PCA=\frac{1}{3}\triangle ABC$ である．△ABC と △PAB について，辺 AB を底辺とすれば高さの比は $1:\frac{1}{6}$ であるから，$\triangle PAB=\frac{1}{6}\triangle ABC$ である．

$$\triangle PBC=\triangle ABC-\triangle PCA-\triangle PAB$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\triangle ABC=\frac{1}{2}\triangle ABC$$

であるから

$$V_1:V_2:V_3=\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA$$

$$=\frac{1}{6}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\boldsymbol{1:3:2}$$

図1

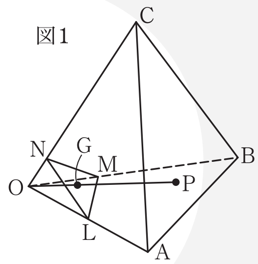
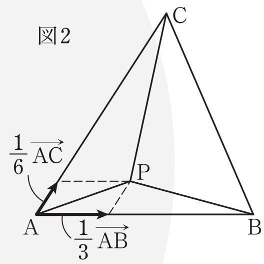


図2



注意 私は ① で，平行四辺形の形で $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ と $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ の和を図示するのが本筋であると思っている．しかし，古くは $\overrightarrow{AP}$ を延長する人が多かった．

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$

AP の延長と BC の交点を Q とする．

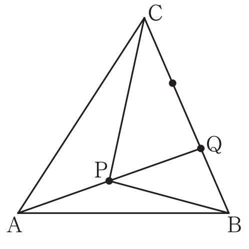
$$BQ:QC=1:2$$

$$AP:PQ=1:1$$

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\triangle QAB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\triangle ABC$$

$$\triangle PCA=\frac{1}{2}\triangle QCA=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\triangle ABC$$

$$\triangle PBC=\left(1-\frac{1}{6}-\frac{2}{6}\right)\triangle ABC=\frac{3}{6}\triangle ABC$$



6 数学III【面積】標準

▶解答◀　(**1**)　$f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2+3}$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x^2+3)-(x^2-3x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{3x^2+6x-9}{(x^2+3)^2}=\frac{3(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

よって，極大値は

$$f(-3)=\frac{9-3\cdot(-3)}{9+3}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

であり，極小値は

$$f(1)=\frac{1-3}{1+3}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

(**2**)　$f(x)=0$ となるのは

$$x^2-3x=0 \qquad \therefore \quad x=0,\ 3$$

のときであり，$0\leqq x\leqq 3$ のとき $f(x)\leqq 0$ である．

$$f(x)=\frac{(x^2+3)-3x-3}{x^2+3}=1-\frac{3x+3}{x^2+3}$$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^3\{-f(x)\}\,dx=\int_0^3\left(\frac{3x+3}{x^2+3}-1\right)dx$$

$$=3\int_0^3\frac{x}{x^2+3}\,dx+3\int_0^3\frac{1}{x^2+3}\,dx-3$$

となる．ここで

$$\int_0^3\frac{x}{x^2+3}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|x^2+3|\Big]_0^3=\frac{1}{2}(\log 12-\log 3)$$

$$=\frac{1}{2}\log 4=\log 2$$

$x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$$

x	$0\ \to\ 3$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{3}$

であるから

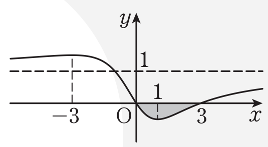
$$\int_0^3\frac{1}{x^2+3}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

したがって，

$$\boldsymbol{S=3\log 2+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-3}$$



要の分析　馴染み深い典型問題が並んでいる．難問はなく，素早く正確な計算力が要求されている．

（SM，渡邉，都賀，坂本賀，前田拓，安田亨）