久留米大学・医学部-前期

1 （1） $x^2-9y^2+36y+20=0$ は，「平方完成」を利用することで，

$$\left(\boxed{ア}y-\boxed{}+x\right)\left(\boxed{}y-\boxed{}-x\right)=\boxed{}$$

と変形できるので，$x^2-9y^2+36y+20=0$ を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ の組は，

$$(x,\ y)=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right),\ \left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$$

ただし，$\boxed{ア}>0$ とする．

（2） $x^2-3xy-6x+18y+14=0$ を x について解くと，

$$x=\frac{\boxed{}y+\boxed{}\pm\sqrt{\boxed{}y^2-\boxed{}y-\boxed{}}}{2}$$

となるので，$x^2-3xy-6x+18y+14=0$ を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ の組は，

$$(x,\ y)=\left(\boxed{},\ \boxed{イ}\right),\ \left(\boxed{},\ \boxed{ウ}\right),\ \left(\boxed{},\ \boxed{イ}\right),\ \left(\boxed{},\ \boxed{ウ}\right)$$

2 $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\theta,\ \angle\mathrm{AOB}=2\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ である三角形 OAB がある．点 A から辺 OB に下ろした垂線と辺 OB との交点を P_1，P_1 から辺 OA に下ろした垂線と辺 OA との交点を P_2，P_2 から辺 OB に下ろした垂線と辺 OB との交点を P_3 とする．このことを繰り返すことで $\mathrm{P}_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を定めていく．辺 OP_n の長さを x_n，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを y_n，三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする．

（1） x_n と x_{n+1} との関係式は $x_{n+1}=\left(\boxed{ア}\right)x_n$ であり，x_n と y_n の関係式は $y_n=\left(\boxed{イ}\right)x_n$ であるから，$x_n=\theta\cdot\left(\boxed{ウ}\right)^n$ であり，$y_n=\theta\cdot\boxed{イ}\cdot\left(\boxed{ウ}\right)^n$ となる．

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ に当てはまるものを下の⓪～⑤ の中から 1 つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよいものとする．

⓪ $\sin\theta$　① $\cos\theta$　② $\tan\theta$　③ $\sin 2\theta$　④ $\cos 2\theta$　⑤ $\tan 2\theta$

（2） $T=\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ とするとき，$T=\dfrac{\theta\sin\boxed{}\theta}{\boxed{}\left(1-\cos\boxed{}\theta\right)}$ であり，$\lim_{\theta\to+0}T=\boxed{}$ である．

（3） p を実数とする．$\lim_{\theta\to+0}\theta^p\sqrt{S_n}$ が 0 以外の値に収束するような p の値は $p=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ であり，このときの極限値は $\boxed{}$ である．

3 （1） 不等式 $1+\log_2(1-x)(1+y)\geqq 2\log_2(y-x+1)$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域の面積は $\dfrac{\boxed{}\pi+\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

（2） 点 $(x,\ y)$ が（1）の領域を動くとき，$0\leqq\theta<2\pi$ において，

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{y}{2}$$

を満たす θ のとりうる値の範囲は，$0\leqq\theta\ \boxed{ア}\ \dfrac{\pi}{\boxed{}},\ \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\pi\ \boxed{イ}\ \theta<2\pi$ である．

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に当てはまるものは下の⓪～② の中から 1 つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよいものとする．

⓪ $=$　① $<$　② $\leqq$

4 θ を偏角とする．極方程式 $r=\theta^2$ で表される曲線を C とするとき，

（1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4\cos 2x\,dx+\boxed{}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^3\sin 2x\,dx=0$ であることより，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分と y 軸と

で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\pi^{\square}}{\square}$ である．

（２） 曲線 C の $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の部分の長さは

$$\frac{1}{\square}\left\{\left(\frac{\pi^2}{\square}+4\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{\pi^2}{\square}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right\}-\frac{\square}{\square}$$

である．

5 異なる n 個から r 個を取る組合せの総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ とする．$k \geqq 2$ とし，下図のように，一番下の行の左から k 列目のマスに ${}_{2k-1}\mathrm{C}_1$ をおく．次に，${}_{2k-1}\mathrm{C}_1$ の上に ${}_{2k-1}\mathrm{C}_2$，そのまた上に ${}_{2k-1}\mathrm{C}_3$ をおいて，k 段目まで順に上に並べていく．このとき，左から k 列目，下から k 段目は ${}_{2k-1}\mathrm{C}_k$ となる．さらに，一番下のマスから k 段目まで上に並べたら，今度は ${}_{2k-1}\mathrm{C}_k$ の左に ${}_{2k-1}\mathrm{C}_{k+1}$ をおき，そのまた左に ${}_{2k-1}\mathrm{C}_{k+2}$ をおき，左端まで順に左に並べていく．また，左から 1 列目，下から 1 段目のマスは ${}_1\mathrm{C}_1$ とする．左から i 列目，下から j 段目のマス目にある ${}_n\mathrm{C}_r$ を $a_{i,\,j}$ と書く．例えば，$a_{3,\,4} = {}_7\mathrm{C}_5$，$a_{1,\,3} = {}_5\mathrm{C}_5$ である．

（１） $a_{8,\,8}$ の値を求めると，$a_{8,\,8} = \square$ である．

（２） $a_{i,\,j} = {}_{11}\mathrm{C}_8$ は，$i = \square$，$j = \square$ であり，$a_{i,\,j} = {}_{203}\mathrm{C}_{97}$ は，$i = \square$，$j = \square$ であり，$a_{i,\,j} = {}_{203}\mathrm{C}_{105}$ は，$i = \square$，$j = \square$ である．

（３） n を 2 以上の整数とするとき，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n,\,j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\,n} = \square^{2n-1} - \square$$

${}_7\mathrm{C}_7$	${}_7\mathrm{C}_6$	${}_7\mathrm{C}_5$	${}_7\mathrm{C}_4$	
${}_5\mathrm{C}_5$	${}_5\mathrm{C}_4$	${}_5\mathrm{C}_3$	${}_7\mathrm{C}_3$	
${}_3\mathrm{C}_3$	${}_3\mathrm{C}_2$	${}_5\mathrm{C}_2$	${}_7\mathrm{C}_2$	
${}_1\mathrm{C}_1$	${}_3\mathrm{C}_1$	${}_5\mathrm{C}_1$	${}_7\mathrm{C}_1$	

$\boxed{1}$

(1) $x^2-9(y-2)^2+56=0$

$9(y-2)^2-x^2=56$

$\underline{\underline{(3y-6+x)(3y-6-x)=56}}$

(ア)〜(カ)

$(3y-6+x)-(3y-6-x)=2x$

$\therefore 3y-6+x$ と $3y-6-x$ の奇偶は一致

$x \geqq 0$ だから $3y-6+x \geqq 3y-6-x$

$3y-6+x=a$, $3y-6-x=b$

とおくと. $x=\dfrac{a-b}{2}$, $y=\dfrac{a+b+12}{6}$

$\therefore (a,b)=(28,2),(14,4)$

$(-2,-28),(-4,-14)$

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ を満たすものは

$\underline{\underline{(x,y)=(5,5),(13,7)}}$

(キ)〜(サ)

(2) $\underline{\underline{x=\dfrac{3y+6\pm\sqrt{9y^2-36y-20}}{2}}}$

(シ)〜(ツ)

x は整数なので

$9y^2-36y-20=n^2$

をみたすことが必要で

(1)より $(n,y)=(5,5),(13,7)$

$(n,y)=(5,5)$ のとき $x=13,8$

$(n,y)=(13,7)$ のとき $x=20,7$

したがって

$\underline{\underline{(x,y)=(8,5),(13,5)}}$

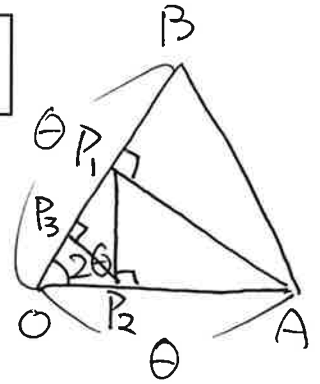
$\underline{\underline{(20,7),(7,7)}}$

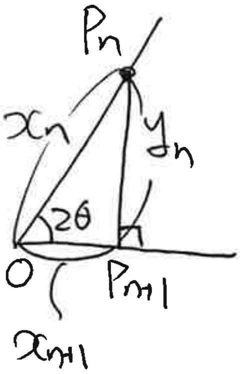
(マークの順だと

$(x,y)=(8,5),(7,7),(13,5)$

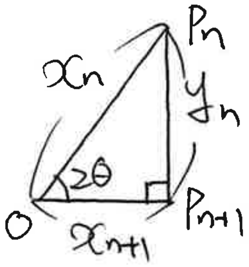
$(20,7)$)

$\boxed{2}$





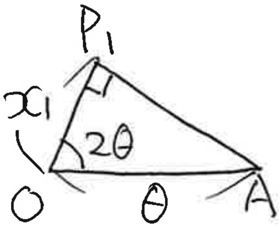
(1)



左図より

$x_{n+1}=(\cos 2\theta)x_n$

$y_n=(\sin 2\theta)x_n$



左図より

$x_1=\theta\cos 2\theta$

よって.

$x_n=x_1(\cos 2\theta)^{n-1}$

$\therefore\ x_n=\theta(\cos 2\theta)^n$

(2) (1)より

$y_n=(\sin 2\theta)\cdot\theta(\cos 2\theta)^n$

$=\theta\sin 2\theta(\cos 2\theta)^n$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$より $0<\cos 2\theta<1$

$\therefore$ Tは初項 $\theta\sin 2\theta\cos 2\theta$

公比 $\cos 2\theta$

の無限等比級数

$$T=\frac{\theta\sin 2\theta\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}$$

$$=\frac{\theta\sin 4\theta}{2(1-\cos 2\theta)}$$

また,

$$\lim_{\theta\to+0}T=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta\sin 4\theta(1+\cos 2\theta)}{2\sin^2 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\times\frac{\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}{\frac{\sin^2 2\theta}{4\theta^2}}$$

$$=\frac{1+1}{2}\times\frac{1}{1^2}$$

$$=1$$

(3) $S_n=\frac{1}{2}x_n\cdot x_{n+1}\sin 2\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot\theta(\cos 2\theta)^n\times\theta(\cos 2\theta)^{n+1}\times\sin 2\theta$

$=\frac{\theta^2}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta(\cos 2\theta)^{2n}$

$=\frac{\theta^2}{4}\sin 4\theta(\cos 2\theta)^{2n}$

$\therefore\ \theta^p\sqrt[n]{S_n}=\theta^p\sqrt[n]{\frac{\theta^2}{4}\sin 4\theta(\cos 2\theta)^{2n}}$

$=(\cos 2\theta)^n\sqrt[n]{\frac{\sin 4\theta}{4\theta}\times\theta^{2p+3}}$

$\theta\to+0$のとき 0以外に収束するので

$2p+3=0$ $\quad\therefore\ p=-\frac{3}{2}$

このとき

$$\lim_{\theta\to+0}\theta^p\sqrt[n]{S_n}=1\cdot\sqrt[n]{1\cdot 1}$$

$$=1$$

$\boxed{3}$

(1) 真数条件より

$(1-x)(1+y)>0$ かつ $y-x+1>0$

$\therefore \begin{cases} x>1,\ y<-1,\ y>x-1 \\ \text{または} \\ x<1,\ y>-1,\ y>x-1 \end{cases}$

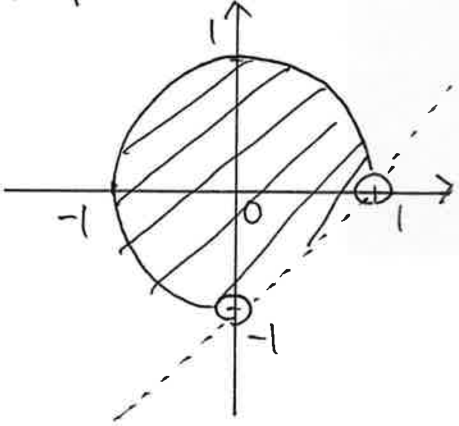
与不等式は

$\log_2 2(1-x)(1+y) \geqq \log_2 (y-x+1)^2$

$2(1-x)(1+y) \geqq (y-x+1)^2$

$\therefore x^2+y^2 \leqq 1$

図示すると下図の斜線部分
境界は破線、白丸は除く



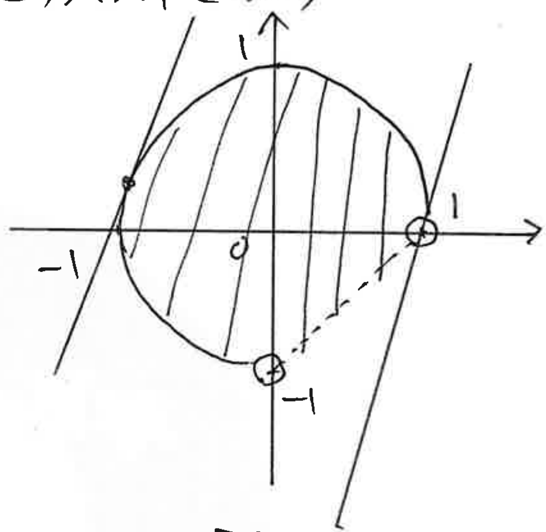
$(\text{面積}) = \frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\times 1\times 1$

$= \frac{3\pi+2}{4}$

(2) $\sin\theta = k$ とおくと

$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} = k \quad \therefore y = \sqrt{3}x - 2k$

これが(1)の領域と共有点をもつ
kのハンイを求めると



$-1 \leqq k < \frac{\sqrt{3}}{2}$ だから

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi < \theta < 2\pi$

$\boxed{4}$

(1) 部分積分法を用いて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos 2x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx$$
$$= \left[x^4 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x^3 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin 2x\,dx$$
$$\therefore \underline{\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos 2x\,dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin 2x\,dx = 0}} \quad (*)$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r = \theta^2$ だから

$x = \theta^2\cos\theta,\ y = \theta^2\sin\theta$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で

$x \geqq 0$ かつ y は単調増加

よって

$$S = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos\theta\,(2\theta\sin\theta + \theta^2\cos\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta^3\sin\theta\cos\theta + \theta^4\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta^3\sin 2\theta + \theta^4\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4\,d\theta + \frac{1}{2}\times (*)$$
$$= \underline{\underline{\frac{\pi^5}{320}}}$$

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} = 2\theta\cos\theta - \theta^2\sin\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$= (2\theta\cos\theta - \theta^2\sin\theta)^2 + (2\theta\sin\theta + \theta^2\cos\theta)^2$$
$$= 4\theta^2 + \theta^4$$

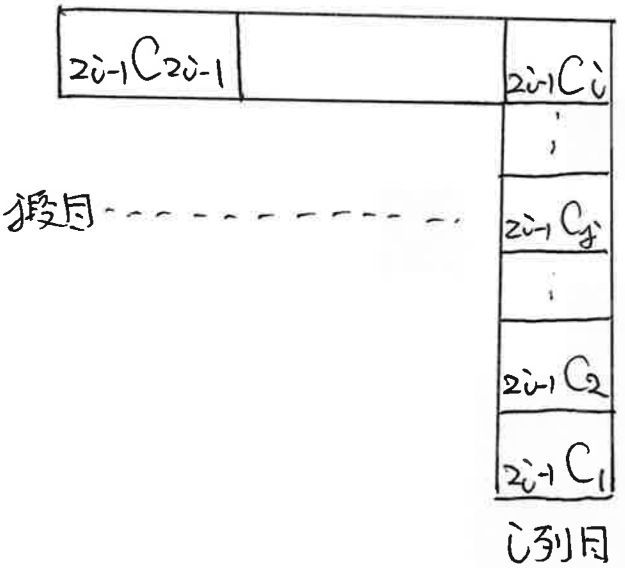
(求める曲線の長さ)

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4\theta^2 + \theta^4}\,d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\theta|\sqrt{\theta^2 + 4}\,d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} -\theta\sqrt{\theta^2+4}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\sqrt{\theta^2+4}\,d\theta$$
$$= \left[-\frac{1}{3}(\theta^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + \left[\frac{1}{3}(\theta^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{\pi^2}{9}+4\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\pi^2}{16}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right\} - \frac{16}{3}}}$$

(注) (1)で誘導を無視すると

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4\,d\theta$$
$$= \underline{\underline{\frac{\pi^5}{320}}}$$

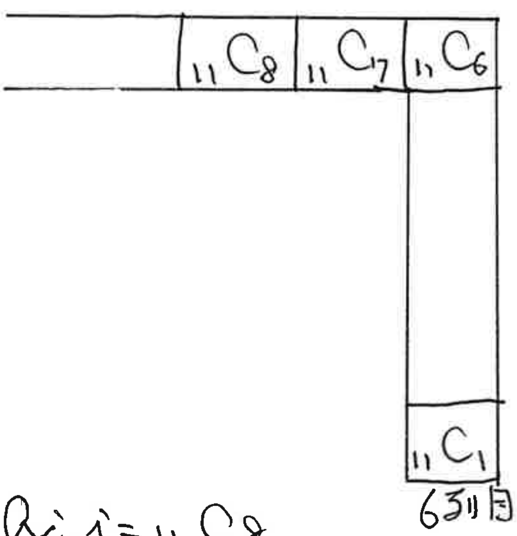
$\boxed{5}$



(1) $a_{8,8} = {}_{15}C_8 = {}_{15}C_7$

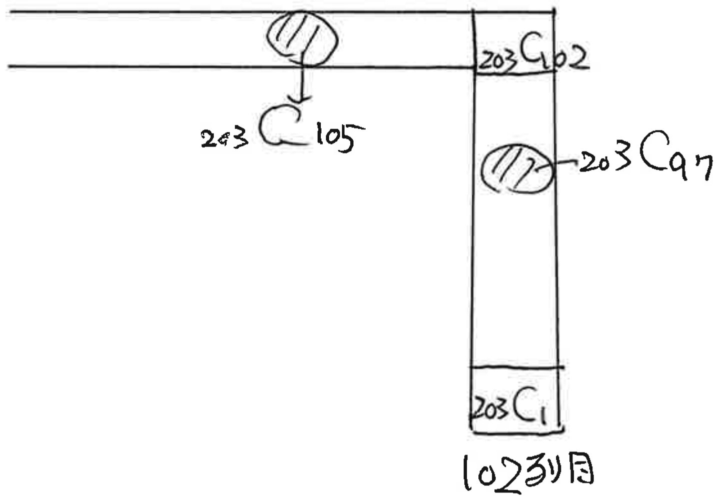
$= 6435$

(2)



$a_{i,j} = {}_{11}C_8$

$i=4,\ j=6$



$_{203}C_{97}$ は $i=102,\ j=97$

$_{203}C_{105}$ は $i=99,\ j=102$

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n}$

$\displaystyle= \sum_{j=1}^{n} {}_{2n-1}C_j + \sum_{i=1}^{n-1} {}_{2n-1}C_{2n-i}$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{2n-1} {}_{2n-1}C_k$

$= 2^{2n-1} - {}_{2n-1}C_0$

$= 2^{2n-1} - 1$