藤田医科大学・ふじた未来入試

試験日　2022 年 11 月 6 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （1） 7 個の数字 1, 1, 2, 2, 0, 0, 0 を使ってできる 7 桁の正の整数は $\square$ 個ある．

（2） 半径が 3 の球に内接する正八面体の体積は $\square$ である．

（3） △ABC の周囲の長さが 40，△ABC に内接する円の半径が 4 である．点 Q が $5\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$ を満たすとき，△QBC の面積は $\square$ である．

（4） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{nk-k^2}{n^3}\right)=\frac{\square}{\square}$ である．

（5） $x^3+7x^2-x-39=0$ の実数解を小さいものから順に a, b, c とするとき，$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{\square}{\square}$ である．

（6） $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\tan\left(\dfrac{5\pi}{14}\right)\tan\left(\dfrac{9\pi}{14}\right)=\square$ である．

（7） 実数で定義される関数 $y=f(x)=\dfrac{8x^2+5}{x^2-3x+6}$ の最大値を M，最小値を m とすると $\dfrac{M}{m}=\dfrac{\square}{\square}$ である．

（8） 1, 4, 6 の数字を使わない正の整数を小さい数から順に 2, 3, 5, 7, 8, 9, 20, 22, 23, ⋯ のように並べるとき，2023 は $\square$ 番目の数字である．

（9） xy 平面上の x 軸の正の範囲に点 P，y 軸の正の範囲に点 Q があり，直線 PQ が点 $(1, 8)$ を通るように動くとき，点 P と点 Q の距離の 2 乗の最小値は $\square$ である．

（10） $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i}{1+\sqrt{3}i}\right)^5=\square+\square i$ である．ただし i は虚数単位である．

2 次の問いに答えよ．

（1） $\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ．

（2） a, b が有理数であるとき，$a+b\sqrt{3}=0$ が $a=b=0$ の必要十分条件であることを示せ．

（3） $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ．

3 点 A，B，C，T が線で結ばれた図 1 のような経路がある．この経路上を点 P が 1 秒ごとに以下のような確率で動く．

- 点 A から点 B，C，T に動く確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である．
- 点 T から点 A に動く確率は $\dfrac{1}{3}$，点 T から右向きに出て反時計回りに動いて点 T に戻る確率は $\dfrac{1}{3}$，左向きに出て時計回りに動いて点 T に戻る確率は $\dfrac{1}{3}$ である．
- 点 B から点 A に動く確率，点 C から点 A に動く確率は，どちらも 1 である．

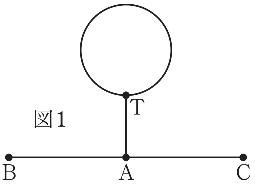
最初，点 P が点 A にあるとする．n 秒後に点 P が点 A，B，C，T にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, t_n とするとき，次の問いに答えよ．ただし n は正の整数とする．

（1） a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ．

（2） a_{n+1} を b_n, c_n, t_n を用いて表せ．

（3） a_n, a_{n+1}, a_{n+2} の間の関係式を求めよ．

（4） $n\to\infty$ における a_n の極限値を求めよ．



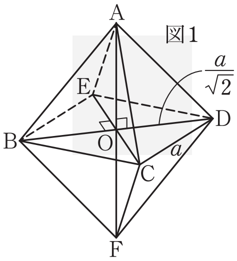
1

（1） 数学A【順列】基本

▶解答◀ 最高位は 1, 2 の 2 通りある．最高位に 1 を用いるとき，残りの位は，1, 2, 2, 0, 0, 0 の順列で $\dfrac{6!}{2!3!}$ 通りあるから全部で $2\cdot\dfrac{6!}{2!3!}=6\cdot5\cdot4=\mathbf{120}$ 個ある．

（2） 数学Ⅰ【空間図形の雑題】基本

▶解答◀ 正八面体の 1 辺を a とする．



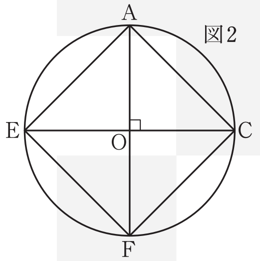


図 1 を見よ．AF，BD, CE はその中点 O で互いに直交する．正八面体と球を，正八面体の対称面 AEFC で切断すると，図 2 のようになる．図 1 には球は描いていない．対称面 AEFC は正方形であるから，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AF}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=3$ となり，$a=3\sqrt{2}$ である．

正八面体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AF}=\frac{1}{3}(3\sqrt{2})^2\cdot6=\mathbf{36}$$

（3） 数学B【位置ベクトル（平面）】標準

▶解答◀ △ABC の面積は，内接円の半径の公式を用いて，$\dfrac{1}{2}\cdot40\cdot4=80$ である．また

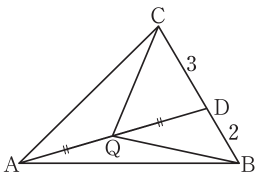
$$5\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$$

$$5\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$$

$$10\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$



BC を 2：3 に内分する点を D とすると，Q は AD の中点である．

したがって，$\triangle\mathrm{QBC}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}=\mathbf{40}$ である．

（4） 数学Ⅲ【無限級数】基本

▶解答◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{nk-k^2}{n^3}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=\frac{1}{2n^2}n(n+1)-\frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6}\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

求める極限値は $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

♦別解♦ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{nk-k^2}{n^3}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\int_0^1(x-x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

（5） 数学Ⅱ【解と係数の関係】標準

▶解答◀ 解と係数の関係を用いて

$a+b+c=-7$ ……………………①

$ab+bc+ca=-1$ ……………………②

$abc=39$ ……………………③

である．① より $b+c=-7-a$, $c+a=-7-b$, $a+b=-7-c$ であるから

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$=\frac{a}{-7-a}+\frac{b}{-7-b}+\frac{c}{-7-c}\quad\cdots\cdots④$$

これを通分すると，分子は

$$a(7+b)(7+c)+b(7+c)(7+a)$$
$$+c(7+a)(7+b)$$
$$=3abc+14(ab+bc+ca)+49(a+b+c)$$
$$=117-14-343=-240$$

分母は

$$-(a+7)(b+7)(c+7)$$
$$=-\{abc+7(ab+bc+ca)$$
$$+49(a+b+c)+343\}$$
$$=-(39-7-343+343)=-32$$

分子も分母も最後に ①～③ を代入した．

したがって④は

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{-240}{-32}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

◆別解◆　解と係数の関係より $a+b+c=-7$

$k=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ とおく．

$$k=\frac{a}{-7-a}+\frac{b}{-7-b}+\frac{c}{-7-c}$$

$$=-1+\frac{7}{7+a}-1+\frac{7}{7+b}-1+\frac{7}{7+c}$$

$$=-3-7\left(\frac{1}{-7-a}+\frac{1}{-7-b}+\frac{1}{-7-c}\right)$$

$f(x)=x^3+7x^2-x-39$ とおく．

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)$$
$$+(x-a)(x-b)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

ここで $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3x^2+14x-1}{x^3+7x^2-x-39}$ であるから

$$k=-3-7\cdot\frac{f'(-7)}{f(-7)}$$

$$=-3-7\cdot\frac{147-98-1}{7-39}=-3+7\cdot\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

注意　$f(x)=0$ の解は $x=-3$，$-2\pm\sqrt{17}$ と求められる．これを代入してもよい．

（**6**）**数学Ⅱ**【加法定理とその応用】**基本**

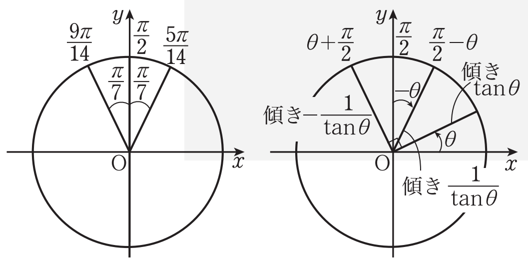
▶解答◀　$\dfrac{5}{14}\pi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{7}$，$\dfrac{9}{14}\pi=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{7}$ である．

$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ とおくと，$\tan\dfrac{5}{14}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\tan\dfrac{9}{14}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$$\tan^2\frac{\pi}{7}\tan\frac{5}{14}\pi\tan\frac{9}{14}\pi$$

$$=(\tan\theta)^2\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)=\mathbf{-1}$$



注意　**【何を公式にするか？】**

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

を公式にするなら，このまま覚えないといけない．図のように傾きを考えて，覚えることになる．

人それぞれである．私は $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ を公式にし，

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

と確認しているように思う．瞬間的にやっているために，認識をしていないが．

（**7**）**数学Ⅰ**【2次方程式】**標準**

▶解答◀　$x^2-3x+6=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$

である．

$$\frac{8x^2+5}{x^2-3x+6}=k$$

とおくと

$$(8-k)x^2+3kx-6k+5=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$k\neq8$ のとき，判別式を D とすると，実数 x が存在することが条件で，$D\geqq0$ であるから

$$D=9k^2-4(8-k)(5-6k)$$

$$=-15k^2+212k-160$$

$$=-(5k-4)(3k-40)\geqq0$$

$$(5k-4)(3k-40)\leqq0 \qquad \therefore\ \frac{4}{5}\leqq k\leqq\frac{40}{3}$$

このとき，$\dfrac{4}{5}\leqq k\leqq\dfrac{40}{3}$ かつ $k\neq8$ である．$k=8$ のとき①は

$$24x-43=0 \qquad \therefore\ x=\frac{43}{24}$$

より $k=8$ となる x が存在する．

したがって，k の取り得る値の範囲は $\dfrac{4}{5}\leqq k\leqq\dfrac{40}{3}$ となり $M=\dfrac{40}{3}$，$m=\dfrac{4}{5}$ であるから $\dfrac{M}{m}=\boldsymbol{\dfrac{50}{3}}$ である．

◆別解◆　$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^2-3x+6)^2}$

$$g(x)=16x(x^2-3x+6)-(8x^2+5)(2x-3)$$

$$=-24x^2+86x+15=-(6x+1)(4x-15)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{15}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=8$$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{5},\ f\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{40}{3}$$

$$M=\frac{40}{3},\ m=\frac{4}{5},\ \frac{M}{m}=\boldsymbol{\frac{50}{3}}$$

（**8**）**数学A**【場合の数】**標準**

▶解答◀　$A=\{2,3,5,7,8,9\}$，$B=\{0,2,3,5,7,8,9\}$ とおく．

1桁の数は A から選ぶ6通りある．

2 桁の数は，十の位が A から選ぶ 6 通り，一の位が B から選ぶ 7 通りあるから，$6\cdot 7=42$ 通りある．

3 桁の数は百の位が A から選ぶ 6 通り，十の位，一の位がそれぞれ B から選ぶ 7 通りあるから，$6\cdot 7^2=294$ 通りある．

4 桁の数は，2000 から始めて，一の位が B から選ぶ 7 通りある．次に 2020, 2022, 2023 であるから，2023 は，4 桁の数の $7+3=10$ 番目にある．

したがって，$6+42+294+10=\mathbf{352}$ 番目にある．

◆別解◆　$0\to 0,\ 2\to 1,\ 3\to 2,\ 5\to 3,\ 7\to 4,\ 8\to 5,\ 9\to 6$ と置き換えると 1, 4, 6 を除く正の整数は順番に

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 12,\ \cdots$$

となり 7 進法における数を小さい順に並べたものになる．

2023 はこの置きかえで 1012 となる．

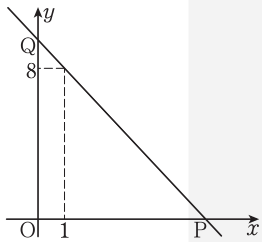
$$1012_{(7)}=1\cdot 7^3+0\cdot 7^2+1\cdot 7+2$$
$$=343+7+2=352$$

より **352** 番目である．

(9)　**数学Ⅲ**【最大値・最小値】**標 準**

▶解答◀　直線 PQ の傾きを m とすると，PQ は $y=m(x-1)+8$ である．

P が x 軸の正の範囲，Q が y 軸の正の範囲にある条件は $m<0$ である．



P の座標は $\left(1-\dfrac{8}{m},\ 0\right)$，Q の座標は $(0,\ 8-m)$ であるから

$$\mathrm{PQ}^2=\left(1-\frac{8}{m}\right)^2+(8-m)^2$$

$f(m)=\left(1-\dfrac{8}{m}\right)^2+(8-m)^2$ とおく．

$$f'(m)=2\left(1-\frac{8}{m}\right)\cdot\frac{8}{m^2}-2(8-m)$$
$$=\frac{16}{m^3}(m-8)+2(m-8)$$
$$=\frac{2}{m^3}(m-8)(m^3+8)$$

$m^3+8=0,\ m<0$ のとき $m=-2$ である．

$m<0$ での増減は次のようになる．

m	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(m)$	$-$	0	$+$	
$f(m)$	↘		↗	

PQ^2 は最小値 $f(-2)=25+100=\mathbf{125}$ をとる．

(10)　**数学Ⅲ**【ド・モアブルの定理】**基 本**

▶解答◀　$\dfrac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i}{1+\sqrt{3}i}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{1}{4}(-4-4i)$$
$$=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

であるから

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i}{1+\sqrt{3}i}\right)^5$$
$$=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\right\}^5$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25}{4}\pi+i\sin\frac{25}{4}\pi\right)$$
$$=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{4+4i}$$

2

数学Ⅰ【命題と証明】**標 準**

▶解答◀　**(1)**　$\sqrt{3}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く．互いに素な自然数 $m,\ n$ を用いて $\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$ とおく．両辺を 2 乗して分母をはらうと

$$3m^2=n^2 \quad\cdots\cdots\text{①}$$

となる．平方数は素因数を偶数個もつから ① の右辺は素因数を偶数個もち，左辺は平方数と 3 があるから素因数を奇数個もつ．矛盾する．よって証明された．

(2)　$P:a+b\sqrt{3}=0,\ Q:a=b=0$ とする．

まず P を仮定して Q を導く．すなわち $P\Longrightarrow Q$ を示す．$b\neq 0$ として矛盾を導く．このとき $\sqrt{3}=-\dfrac{a}{b}$ となり，左辺は無理数，右辺は有理数で矛盾する．したがって $b=0$ であり，$a+b\sqrt{3}=0$ に代入し，$a=0$ であるから Q が示せた．

次に $Q\Longrightarrow P$ であるが，これは明らかに成り立つ．

したがって P と Q は同値である．

(3)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であるとする．a を正の有理数として，$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$ とおくと

$$\sqrt{2}=a-\sqrt{3}$$

2 乗して

$$2=a^2+3-2a\sqrt{3}$$

$2a>0$ であるから

$$\sqrt{3}=\frac{a^2+1}{2a}$$

左辺は無理数，右辺は有理数で矛盾する．したがって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

◆別解◆　以下，文字は自然数である．

（1）①の後，左辺は素因数 3 をもつから，右辺も素因数 3 をもち，n は素因数 3 をもつ．$n = 3r$ とおくと $3m^2 = 9r^2$ となり，3 で割って $3r^2 = m^2$ となる．左辺は 3 の倍数であるから，m は 3 の倍数である．m, n が両方とも 3 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する．

　したがって $\sqrt{3}$ は無理数である．

（3）$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であるとする．a を正の有理数として，$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$ とおくと

$$\sqrt{2}=a-\sqrt{3}$$

2 乗して

$$2=a^2+3-2a\sqrt{3}$$

$$2a\sqrt{3}-(1+a^2)=0$$

（2）を用いると，$2a=0$ かつ $1+a^2=0$ となるが $1+a^2>0$ であるから，矛盾する．したがって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

注意　**1°【批判的に検討】**

　無理数の証明は，教科書などでは伝統的に（1）の別解のようにやっているが，グルグル回る感じで気持ち悪さがあるし，昔から批判もされる．教わったことをそのまま覚えるのではなく，効率的に整理し，解答のようにすればスッキリする．

2°【有理数】

　有理数は rational number，整数比で表された数の意味である．分母が 1 の場合も含めて，整数分の整数の形の数であり，有理数分の有理数は有理数となる．「合理的な」という訳語を採用したのは誤訳ないし，ダジャレであると言われている．

3

数学Ⅲ【数列の極限】**標準**

▶解答◀　（1）$n+1$ 秒後に P が A にあるのは，n 秒後に P が B にあり（確率 b_n），確率 1 で A に移動するか，n 秒後に P が C にあり（確率 c_n），確率 1 で A に移動するか，n 秒後に P が T にあり（確率 t_n），確率 $\frac{1}{3}$ で A に移動するときであるから

$$a_{n+1}=b_n+c_n+\frac{1}{3}t_n \quad\cdots\cdots①$$

$n+1$ 秒後に P が B にあるのは，n 秒後に P が A にあり（確率 a_n），確率 $\frac{1}{3}$ で B に移動するときであるから

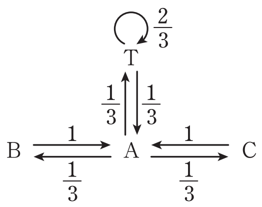
$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n \quad\cdots\cdots②$$

$n+1$ 秒後に P が C にあるのは B と同様にして

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n \quad\cdots\cdots③$$

$n+1$ 秒後に P が T にあるのは，n 秒後に P が A にあり（確率 a_n），確率 $\frac{1}{3}$ で T に移動するか，n 秒後に P が T にあり（確率 t_n），確率 $\frac{2}{3}$ で再び T に戻るときであるから

$$t_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}t_n \quad\cdots\cdots④$$



$$(a_1, b_1, c_1, t_1)=\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

から始めて①～④に順次代入して

$$(a_2, b_2, c_2, t_2)=\left(\frac{7}{9}, 0, 0, \frac{2}{9}\right)$$

$$(a_3, b_3, c_3, t_3)=\left(\frac{2}{27}, \frac{7}{27}, \frac{7}{27}, \frac{11}{27}\right)$$

$$(a_4, b_4, c_4, t_4)=\left(\frac{53}{81}, \frac{2}{81}, \frac{2}{81}, \frac{8}{27}\right)$$

したがって，$a_1=\mathbf{0}$, $a_2=\mathbf{\frac{7}{9}}$, $a_3=\mathbf{\frac{2}{27}}$, $a_4=\mathbf{\frac{53}{81}}$ である．

（2）①より $\boldsymbol{a_{n+1}=b_n+c_n+\frac{1}{3}t_n}$

（3）$a_n+b_n+c_n+t_n=1$ より

$$b_n+c_n=1-a_n-t_n$$

これを①に代入して

$$a_{n+1}=-a_n-\frac{2}{3}t_n+1$$

$$t_n=\frac{3}{2}(1-a_{n+1}-a_n)$$

であるから，④に代入して

$$\frac{3}{2}(1-a_{n+2}-a_{n+1})=\frac{1}{3}a_n+(1-a_{n+1}-a_n)$$

$$-\frac{3}{2}a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{9a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n-3=0} \quad\cdots\cdots⑤$$

（4）$9e+3e-4e-3=0\ \left(e=\frac{3}{8}\right)$ $\cdots\cdots⑥$

⑤－⑥より

$$9(a_{n+2}-e)+3(a_{n+1}-e)-4(a_n-e)=0$$

$a_n-e=p_n$ とすると

$$9p_{n+2}+3p_{n+1}-4p_n=0 \quad\cdots\cdots⑦$$

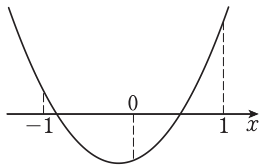
特性方程式は

$$9x^2+3x-4=0$$

$f(x)=9x^2+3x-4$ とおく．

$$f(-1)=2>0,\ f(0)=-4<0,\ f(1)=8>0$$

　$f(x)=0$ は $-1<x<0$, $0<x<1$ に 1 つずつ解をもつ．これらを順に α, β とする．



⑦を2通りに変形する．

$$p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n)$$

より数列 $\{p_{n+1}-\alpha p_n\}$ は等比数列であるから

$$p_{n+1}-\alpha p_n=\beta^{n-1}(p_2-\alpha p_1) \quad \cdots\cdots⑧$$

また

$$p_{n+2}-\beta p_{n+1}=\alpha(p_{n+1}-\beta p_n)$$

より数列 $\{p_{n+1}-\beta p_n\}$ は等比数列であるから

$$p_{n+1}-\beta p_n=\alpha^{n-1}(p_2-\beta p_1) \quad \cdots\cdots⑨$$

⑧，⑨を辺ごとに引く．

$$(-\alpha+\beta)p_n$$
$$=\beta^{n-1}(p_2-\alpha p_1)-\alpha^{n-1}(p_2-\beta p_1)$$
$$p_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\{\beta^{n-1}(p_2-\alpha p_1)-\alpha^{n-1}(p_2-\beta p_1)\}$$

$|\alpha|<1$，$|\beta|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^{n-1}=0,\ \lim_{n\to\infty}\beta^{n-1}=0$$

だから $\lim_{n\to\infty}p_n=0$ である．よって $\lim_{n\to\infty}a_n=e=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$

要の分析　易化傾向は変わらず．

（荻原，楊，染矢，安田亨）