1 （1） $\dfrac{3}{2\sqrt{13}-7}$ の整数部分が$\boxed{}$であり，小数部分は$\boxed{}$である．ただし，小数部分は分数でない形で表せ．

（2） a を整数とする．$\dfrac{2}{a-\sqrt{7}}$ の整数部分が 5 であるとき，$a=\boxed{}$ であり，$\dfrac{2}{a-\sqrt{7}}$ の小数部分は$\boxed{}$である．ただし，小数部分は分数でない形で表せ．

（24　久留米大・推薦）

1

▶解答◀ （**1**） $\dfrac{3}{2\sqrt{13}-7}=2\sqrt{13}+7$

$2\sqrt{13}=\sqrt{52}$ なので，

$$49<52<64 \qquad \therefore \quad 7<2\sqrt{13}<8$$

よって，$14<2\sqrt{13}+7<15$ だから整数部分は **14**，小数部分は

$$(2\sqrt{13}+7)-14=\mathbf{2\sqrt{13}-7}$$

（**2**） 条件より，$5 \leqq \dfrac{2}{a-\sqrt{7}}<6$ なので

$$\frac{1}{6}<\frac{a-\sqrt{7}}{2} \leqq \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{1+3\sqrt{7}}{3}<a \leqq \frac{2+5\sqrt{7}}{5}$$

$$49<63<64,\ 169<175<196$$

$$\therefore \quad 7<3\sqrt{7}<8,\ 13<5\sqrt{7}<14$$

よって，

$$\frac{8}{3}<\frac{1+3\sqrt{7}}{3}<3,\ 3<\frac{2+5\sqrt{7}}{5}<\frac{16}{5}$$

だから，$a=\mathbf{3}$

したがって，$\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}=3+\sqrt{7}$ の小数部分は

$$(3+\sqrt{7})-5=\mathbf{\sqrt{7}-2}$$

2　$\boxed{0}$ から $\boxed{10}$ まで順に数字がついたマスがある．$\boxed{0}$ のマスを「スタート」としてコマを置き，1回の試行では，サイコロを1個投げ，出た目の数だけコマを進める．止まったマスで続けて次の試行を行い，$\boxed{10}$ のマスまでは，コマは常に数の大きいマスの方へと進む．$\boxed{10}$ のマスをこえた分は，コマは数の小さいマスの方へ後戻りするものとする．例えば，$\boxed{8}$ のマスで出た目の数が4で，さらにその次の試行で2が出た場合，コマは

$$\boxed{8} \to \boxed{9} \to \boxed{10} \to \boxed{9} \to \boxed{8} \to \boxed{9} \to \boxed{10}$$

と進む．コマがちょうど $\boxed{10}$ のマスに止まるとこの試行は終わるものとする．ただし，この試行で使用するサイコロは6面で，どの面も等しい確率で出るものとする．

（1）「スタート」から出発して，2回目の試行で終わる確率は $\boxed{}$ である．

（2）「スタート」から出発して，3回目の試行で終わる確率は $\boxed{}$ である．

（3）「スタート」から出発して，3回目の試行で終わったとき，途中で後戻りしていない条件付き確率は $\boxed{}$ である．

（4）$\boxed{5}$ に止まったら「スタート」に戻るという規則を付け加えたとき，3回目の試行で終わる確率は $\boxed{}$ である．

（5）試行を4回行い，途中で2回後戻りして試行が終わる確率は $\boxed{}$ である．　（24　久留米大・推薦）

2

▶解答◀

2回目＼1回目	1の目	2の目	3の目	4の目	5の目	6の目
1の目	2	3	4	5	6	7
2の目	3	4	5	6	7	8
3の目	4	5	6	7	8	9
4の目	5	6	7	8	9	10
5の目	6	7	8	9	10	⑨
6の目	7	8	9	10	⑨	⑧

2回の試行後のコマの位置表(表I)

（1）表の10の数は3個なので

$$\frac{3}{6^2}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

（2）2回終了後のコマの位置が4, 5, 6, 7, 8, 9のとき3回目に6, 5, 4, 3, 2, 1の目が出れば良く，表Iで4, 5, 6, 7, 8, 9の数は(数えるときは36通りから2, 3, 10を引く）30通り．

$$\therefore\ \frac{30}{6^2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{5}{36}}$$

（3）（2）より，3回目にゴールしているのは30通り．そのうち後戻りしているのは表Iの○がついた3通り．

$$\therefore\ \frac{30-3}{30}=\mathbf{\frac{9}{10}}$$

（4）

2回目＼1回目	1の目	2の目	3の目	4の目	5の目	6の目
1の目	2	3	4	0	1	7
2の目	3	4	0	6	2	8
3の目	4	0	6	7	3	9
4の目	0	6	7	8	4	10
5の目	6	7	8	9	0	9
6の目	7	8	9	10	6	8

規制付きの2回の試行後のコマの位置表(表II)

（2）と同様にして，2回終了後のコマの位置が4, 5, 6, 7, 8, 9のときの数は $36-13=23$ 通り．

$$\therefore\ \frac{23}{6^2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{23}{216}}$$

（5）4回の試行で2回後戻りしてゴールするのは，2回目と3回目で後戻りする場合で，2回目で後戻りするのは表Iで⑧と⑨のとき

⑧のときは，3回目に3, 4, 5, 6の目

⑨のときは，3回目に2, 3, 4, 5, 6の目

が出ると3回目でも後戻りする．その後4回目は1通りでゴールする．よって，

$$\frac{1\cdot4+2\cdot5}{6^4}=\mathbf{\frac{7}{648}}$$

3 座標平面上に，2つの円 $C_1 : x^2+y^2=8$, $C_2 : x^2+y^2-6x-8y-a=0$ があり，この2つの円は異なる2点A，Bで交わっているものとする．ただし，a は実数の定数とする．

（1） 線分ABの長さが4となるときの a の値は $a=$ **ア** と $a=$ **イ** である．ただし，**ア** $<$ **イ** とする．

（2） $a \neq 8$ のとき，原点Oと2つの交点A，Bを頂点とする三角形の面積が最大となるときの面積は $\boxed{}$ である．

以下，円 C_2 は（1）で求めた $a=$ **イ** のときとする．

（3） 2点A，Bを通る直線の方程式は $y=\boxed{}$ である．

（4） 2点A，Bを通り，中心の x 座標が -6 である円を C_3 とするとき，円 C_3 の方程式は $\boxed{}$ である．ただし，$\left(x+\boxed{}\right)^2+\left(y+\boxed{}\right)^2=\boxed{}$ の形で答えよ．

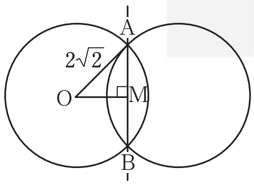
（5） 点Pが円 C_2 上を，点Qが（4）の円 C_3 上を動くとき，2点P，Q間の距離が最大となるときの最大値は $\boxed{}$ である．

（24　久留米大・推薦）

3 **▶解答◀** （**1**） 直線ABの方程式は

$$x^2+y^2-8-(x^2+y^2-6x-8y-a)=0$$

$\therefore$ $6x+8y+a-8=0$ ……………………①



ABの中点をMとするとOM＝2となればよいので

$\dfrac{|a-8|}{10}=2$ より $a-8=\pm 20$

$\therefore$ $a=\mathbf{-12, 28}$

（**2**） $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2\sqrt{2}$ なので，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=\mathbf{4}$

（**3**） ①に $a=28$ を代入して

$$\boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}}$$

（**4**） C_3 の方程式は

$$x^2+y^2-8+k(6x+8y+20)=0$$

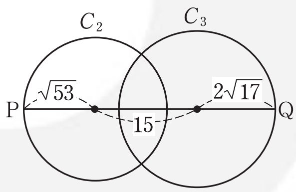
とおける．

中心の x 座標が -6 なので

$-3k=-6$　　$\therefore$　$k=2$

$\therefore$ $(x+6)^2+(y+8)^2=\mathbf{68}$

（**5**） 図のように C_2, C_3 の各中心とP，Qが同一直線上に並ぶときで，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{53}+15+2\sqrt{17}}$



4 （1） 3 次方程式 $2x^3+3x^2-1=0$ の解は $x=\boxed{}$ である．

（2） k を実数の定数とする．3 次方程式 $x^3+3x^2+3kx+1=0$ と 2 次方程式 $x^2+2x+k=0$ が共通解をもつときの k の値と，そのときの共通解は，

$k=\boxed{}$ のとき，共通解は $x=\boxed{\text{ア}}$ である．

$k=\boxed{}$ のとき，共通解は $x=\boxed{\text{イ}}$ である．

ただし，$\boxed{\text{ア}}<\boxed{\text{イ}}$ とする．

（3） k を実数の定数とし，i を虚数単位とする．方程式 $x^3+(3+i)x^2+(3k+2i)x+1+ki=0$ が負の実数解と虚数解をもつときの k の値と，そのときの負の実数解と虚数解は，$k=\boxed{}$，$x=\boxed{}$ である．

（24　久留米大・推薦）

4 **▶解答◀** （**1**） $(x+1)^2(2x-1)=0$

$\therefore\quad x=\boldsymbol{-1,\ \frac{1}{2}}$

（**2**） 共通解を α とすると

$\alpha^3+3\alpha^2+3k\alpha+1=0$ ……………………………①

$\alpha^2+2\alpha+k=0$ ……………………………………②

② より $k=-\alpha^2-2\alpha$ を ① に代入して

$\alpha^3+3\alpha^2+3(-\alpha^2-\alpha)\alpha+1=0$

$2\alpha^3+3\alpha^2-1=0$

（1）より $\alpha=-1,\ \frac{1}{2}$

② に代入して

$(k,\alpha)=\boldsymbol{(1,-1),\ \left(-\frac{5}{4},\ \frac{1}{2}\right)}$

（**3**） 負の実数解を β とすると

$\beta^3+3\beta^2+3k\beta+1+i(\beta^2+2\beta+k)=0$

k は実数だから

$$\begin{cases}\beta^3+3\beta^2+3k\beta+1=0\\ \beta^2+2\beta+k=0\end{cases}$$

（2）より $\beta<0$ となるのは

$\beta=-1,\ k=\boldsymbol{1}$

このとき与方程式は

$x^3+3x^2+3x+1+i(x^2+2x+1)=0$

$(x+1)^2(x+1+i)=0$

$\therefore\quad x=\boldsymbol{-1,\ -1-i}$

5 先生と久米さんの二人の会話文を読み，次の問いに答えよ．

〔問題 1〕 和 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ．

- 久米：これは第 k 項を差の形に変形することで和が求められる問題ですね．まず，a を定数として，
  $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ の形に変形するといいんですよね？
- 先生：そうですね．
- 久米：そして $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ の式に $k=1,2,\cdots,n$ を代入して，辺々を加えることで和 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ が求められます．
- 先生：では，和を求めてみましょう．

（1） a の値は，$a=\boxed{}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\boxed{}$$

である．

〔問題 2〕 和 $\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot3^k$ を求めよ．

- 久米：$\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot3^k$ は，$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot3^k$ とおき，S_n-rS_n を計算して，S_n を求めます．
- 先生：そのとおりです！よく勉強していますね．では，今回は別の方法でこの和を求めてみましょう．
- 久米：はい．では，どのようにして解くのか，教えてください．
- 先生：〔問題 1〕で考えたように $(k+1)\cdot3^k$ を「2 数の差の形」で表すことを考えてみましょう．
- 久米：2 数の差の形？〔問題 1〕の場合はわかりますが，この場合はちょっとわかりません …．
- 先生：難しかったですか？では，この問題の変形を教えます．ただし，あとの問題はこの変形を参考にして，考えてみましょう．
- 久米：はい．この場合の変形を理解して，次からの問題で利用します．
- 先生：では，この場合は $(k+1)\cdot3^k=\{s(k+1)+t\}\cdot3^{k+1}-(sk+t)\cdot3^k$ となるような s,t の値を求めます．わかりますか？この変形ができれば，〔問題 1〕と同じように考えて，$\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot3^k$ を求めることができます．
- 久米：やってみます！

（2） s,t の値は，$s=\boxed{}$，$t=\boxed{}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot3^k=\boxed{}$$

である．

〔問題 3〕 和 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)\cdot3^k$ を求めよ．

- 久米：この問題も〔問題 2〕で教えてもらった考え方でできますか？
- 先生：できます．しっかりと考えてみましょう！
- 久米：はい！やってみます！

（３） $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)\cdot 3^k=\boxed{}$ である．

〔問題 4〕 和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{3k+5}{(3k-1)(3k+2)\cdot 2^{k+1}}$ を求めよ．

（４） $\sum_{k=1}^{n}\frac{3k+5}{(3k-1)(3k+2)\cdot 2^{k+1}}=\boxed{}$ である．

（24 久留米大・推薦）

5 ▶解答◀ （１） $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=2}$

$\therefore$ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$

（２） $(k+1)\cdot 3^k=\{s(k+1)+t\}\cdot 3^{k+1}-(sk+t)\cdot 3^k$

の両辺 3^k で割ると

$k+1=(sk+s+t)\cdot 3-(sk+t)$

$\therefore$ $k+1=2sk+3s+2t$

これが k の恒等式となればよく

$\therefore$ $\boldsymbol{s=\frac{1}{2},\ t=-\frac{1}{4}}$

したがって

$(与式)=\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\frac{1}{2}(k+1)-\frac{1}{4}\right\}\cdot 3^{k+1}\right.$

$\left.-\left(\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}\right)\cdot 3^k\right]$

$=\left\{\frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{4}\right\}\cdot 3^{n+1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 3$

$=\boldsymbol{\frac{(2n+1)\cdot 3^{n+1}-3}{4}}$

（３） （２）と同様にして

$(k^2+k+1)\cdot 3^k$

$=\{p(k+1)^2+q(k+1)+r\}\cdot 3^{k+1}$

$-(pk^2+qk+r)\cdot 3^k$

と整理すると

k^2+k+1

$=2pk^2+(6p+2q)k+(3p+3q+2r)$

$\therefore$ $p=\frac{1}{2},\ q=-1,\ r=\frac{5}{4}$

したがって

$(与式)=\left\{\frac{1}{2}(n+1)^2-(n+1)+\frac{5}{4}\right\}\cdot 3^{n+1}$

$-\left(\frac{1}{2}-1+\frac{5}{4}\right)\cdot 3$

$=\boldsymbol{\frac{(2n^2+3)\cdot 3^{n+1}-9}{4}}$

（４） $\frac{3k+5}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{a}{3k-1}-\frac{b}{3k+2}$ とおく．

$=\frac{3(a-b)k+2a+b}{(3k-1)(3k+2)}$

$\therefore$ $a-b=1,\ 2a+b=5$

$\therefore$ $a=2,\ b=1$

$(与式)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\cdot\frac{1}{2^{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(3k-1)\cdot 2^k}-\frac{1}{(3k+2)\cdot 2^{k+1}}\right\}$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{(3n+2)\cdot 2^{n+1}}=\boldsymbol{\frac{(3n+2)\cdot 2^{n-1}-1}{(3n+2)\cdot 2^{n+1}}}$