東邦大学・医学部

試験日　2023 年 2 月 7 日　時間 90 分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1　1 つの問題には 4 つの選択肢があり，この選択肢の中から正しいものを 1 つ解答する．問題が全部で 5 題あり，それぞれの問題に対して 1 つの選択肢を無作為に選んで解答するとき，4 題以上正解する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，少なくとも 2 題正解する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

2　実数 x, y がそれぞれ $\dfrac{1}{\log_3 x} - \dfrac{1}{\log_2 x} = \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2^{3y-1}} + \dfrac{1}{8^{2y-1}} = 1$ を満たすとき，$x = \dfrac{\square}{\square}$，$\log_x y = \dfrac{\square}{\square}$ である．

3　座標空間において，3 点 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ -5)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ -4)$, $\mathrm{C}(-1,\ 3,\ 1)$ の定める平面を α とする．点 $\mathrm{P}(a,\ a,\ a)$ が平面 α 上にあるとき，a の値は $a = \dfrac{\square}{\square}$ である．点 $\mathrm{Q}(b,\ c,\ -7)$ があり，直線 AQ が平面 α に直交するとき，b と c の値はそれぞれ $b = \square$, $c = \square$ である．

4　$\triangle\mathrm{ABC}$ において $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{BC} = 2\sqrt{6}$, $\mathrm{CA} = 3$ とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を O，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{OD} = \dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

5　x, y, z を整数とする．$3x - 23y = 104$ を満たすとき，$|2x - 3y|$ の最小値は $\square$ である．$5x - 9y - 2z = 18$ および $-6x + 2y + 3z = 25$ を満たすとき，$|x + y + z|$ の最小値は $\square$ である．

6　複素数平面上に，異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ と，$z = \dfrac{2\alpha - 3\beta + 6\gamma}{5}$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ がある．直線 AP と直線 BC の交点を Q とすると，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\square}{\square}$ である．また，直線 AC と直線 BP の交点を R とすると，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BR}} = \dfrac{\square}{\square}$ である．

7　m, n を自然数として，$S_n(m) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$ とする．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\{S_n(1)\}^3}{\{S_n(2)\}^2} = \dfrac{\square}{\square}$，および $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\{S_n(3)\}^3}{\{S_n(5)\}^2} = \dfrac{\square}{\square}$ が成り立つ．

8　2 つの変量の組 $(x,\ y)$ についてのデータがあり，変量 x の分散は 9，変量 y の分散は 4，x と y の相関係数 r は $0 \leqq r \leqq 1$ の範囲の値をとることがわかっている．このとき，x と y の共分散 C のとり得る値の範囲は $\square \leqq C \leqq \square$ である．また，変量 z を $z = x - y$ で定めるとき，z の分散 V のとり得る値の範囲は $\square \leqq V \leqq \square$ である．

9　座標空間において，不等式 $\dfrac{10}{3}(x + y + z - 7) \geqq x^2 + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} - 7$ の表す立体を E とする．E と平面 $z = t$ が交わるような定数 t のとり得る値の範囲は $\square \leqq t \leqq \square$ である．また，E の体積は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}\pi$ である．

10 対数は自然対数とする．関数

$$f(x)=(\sin x+\cos x)^{5\sin x+5\cos x+\log(\sin x+\cos x)}$$

について，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\boxed{}$，$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\boxed{}$ である．

1

数学A【独立試行・反復試行の確率】基本

▶解答◀　1 つの問題を正解する確率は $\dfrac{1}{4}$ である．4 題以上正解するのは，4 題か 5 題正解するときであるから，その確率は

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^5=\mathbf{\frac{1}{64}}$$

である．また，「少なくとも 2 題正解する」ことの余事象は 1 題以下しか正解しないことであり，その確率は

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{81}{128}$$

であるから，少なくとも 2 題正解する確率は $1-\dfrac{81}{128}=\mathbf{\dfrac{47}{128}}$ である．

2

数学II【指数・対数方程式】標準

▶解答◀　底を 3 に揃えると

$$\frac{1}{\log_3 x}-\frac{\log_3 2}{\log_3 x}=\frac{1}{3}$$

$$\log_3 x=3(1-\log_3 2)$$

$$\log_3 x=3\log_3\frac{3}{2}$$

$$x=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{27}{8}}$$

である．また，$Y=2^{3y}$ とおくと

$$\frac{2}{Y}+\frac{8}{Y^2}=1$$

$$Y^2-2Y-8=0$$

$$(Y+2)(Y-4)=0$$

$Y>0$ より $Y=4$ であるから，$2^{3y}=4$ となる．よって，$y=\dfrac{2}{3}$ となる．このとき，

$$x=(y^{-1})^3 \qquad \therefore\quad x^{-\frac{1}{3}}=y$$

となるから，$\log_x y=\mathbf{\dfrac{-1}{3}}$ である．

3

数学B【平面の方程式】標準

▶解答◀　α の法線ベクトルを $\vec{v}=(p,\,q,\,r)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\,1,\,1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,\,4,\,6)$ が $\vec{v}$ に垂直であるから内積をとって

$$-p+q+r=0 \quad\cdots\cdots\text{①}$$

$$-3p+4q+6r=0 \quad\cdots\cdots\text{②}$$

②−①×4 より $p+2r=0$ となり $p=-2r$ である．これを ① に代入し $q+3r=0$ となる．$p=-2r$，$q=-3r$ となるから，$\vec{v}=-r(2,\,3,\,-1)$ となる．$r=-1$ として $\vec{v}=(2,\,3,\,-1)$ を採用する．

$$\alpha: 2(x-2)+3(y+1)-(z+5)=0$$

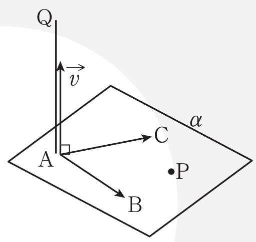
$$2x+3y-z=6$$

となる．$\mathrm{P}(a,\,a,\,a)$ が平面 α 上にあるから

$$2a+3a-a=6 \qquad \therefore\quad a=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

である．また，AQ が α に直交するとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(b-2,\,c+1,\,-2)$ が $\vec{v}=(2,\,3,\,-1)$ と平行であるから，$(b-2,\,c+1,\,-2)=t(2,\,3,\,-1)$ とおけて z 成分から $t=2$ となる．

$b-2=4$，$c+1=6$ で $b=\mathbf{6}$，$c=\mathbf{5}$



4

数学I【正弦定理・余弦定理】標準

▶解答◀　△ABC において余弦定理より

$$\cos A=\frac{9+25-24}{2\cdot3\cdot5}=\frac{1}{3}$$

であるから，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となる．△ABC の外接円の半径を R とおくと，△ABC において正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$$

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

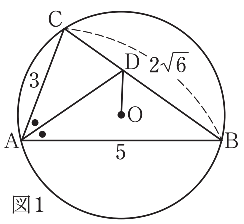


図1

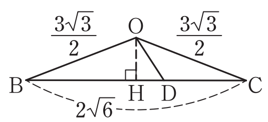


図2

また，内角の二等分線の定理より $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=5:3$ であるから，$\mathrm{BD}=\dfrac{5}{5+3}\mathrm{BC}=\dfrac{5\sqrt{6}}{4}$ である．さら

に，O から BC に下ろした垂線の足を H とすると，$BH = CH = \sqrt{6}$ であり，△OBH においてピタゴラスの定理より

$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = \frac{27}{4} - 6 = \frac{3}{4}$$

となる．$DH = BD - BH = \frac{\sqrt{6}}{4}$ であるから，△ODH においてピタゴラスの定理より

$$OD = \sqrt{OH^2 + DH^2}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

5 数学A【不定方程式】標準

▶解答◀　特に断りのない限り，文字はすべて整数とする．

$$x = \frac{23y + 104}{3} = 8y + 35 - \frac{y+1}{3}$$

であるから，$k = \frac{y+1}{3}$ とおくと $y = 3k - 1$ であり，

$$x = 8(3k-1) + 35 - k = 23k + 27$$
$$x = 23k + 27,\ y = 3k - 1 \quad \cdots\cdots ①$$

とかける．このとき

$$2x - 3y = 2(23k + 27) - 3(3k - 1)$$
$$= 37k + 57$$

である．$k = -2$ のとき $|2x - 3y| = 17$，$k = -1$ のとき $|2x - 3y| = 20$ であるから，$|2x - 3y|$ の最小値は **17** である．また

$$5x - 9y - 2z = 18 \quad \cdots\cdots ②$$
$$-6x + 2y + 3z = 25 \quad \cdots\cdots ③$$

②×3＋③×2 より z を消去すると $3x - 23y = 104$ となる．これより，x, y は ① のようにかけるから，② へ代入して

$$5(23k + 27) - 9(3k - 1) - 2z = 18$$
$$z = 44k + 63$$

となるから，

$$x + y + z = (23k + 27) + (3k - 1) + (44k + 63)$$
$$= 70k + 89$$

よって，$|x + y + z|$ は $k = -1$ のとき最小値 **19** をとる．

6 数学III【複素数と図形】標準

▶解答◀

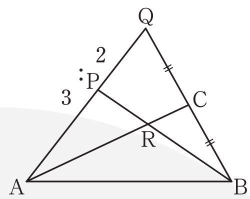
$$z = \frac{2\alpha + 3 \cdot \frac{-\beta + 2\gamma}{-1 + 2}}{2 + 3}$$

BC を 2 : 1 に外分する点を Q としたとき，P は AQ を 3 : 2 に内分する点である．図を見よ．

これより，$\frac{AP}{AQ} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$ である．また，△ACQ と直線 BP についてメネラウスの定理より

$$\frac{RP}{BR} \cdot \frac{AQ}{PA} \cdot \frac{CB}{QC} = 1$$
$$\frac{RP}{BR} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1 \qquad \therefore\ \frac{RP}{BR} = \frac{3}{5}$$

よって，$\frac{BP}{BR} = \boldsymbol{\frac{8}{5}}$ である．



7 数学III【区分求積法】標準

▶解答◀　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(m)}{n^{m+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^m = \int_0^1 x^m\,dx$$
$$= \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

であるから，$n \to \infty$ のとき

$$\frac{\{S_n(1)\}^3}{\{S_n(2)\}^2} = \frac{\left(\frac{S_n(1)}{n^2}\right)^3}{\left(\frac{S_n(2)}{n^3}\right)^2} \to \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

$$\frac{\{S_n(3)\}^3}{\{S_n(5)\}^2} = \frac{\left(\frac{S_n(3)}{n^4}\right)^3}{\left(\frac{S_n(5)}{n^6}\right)^2} \to \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{9}{16}}$$

8 数学I【散布図と相関係数】標準

▶解答◀　x, y の分散をそれぞれ $s_x{}^2, s_y{}^2$ とおくと，$s_x = 3, s_y = 2$ であり

$$0 \leqq r = \frac{C}{s_x s_y} \leqq 1$$
$$0 \leqq \frac{C}{3 \cdot 2} \leqq 1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{0 \leqq C \leqq 6}$$

また，$z = x - y$ の分散 V について，変量 z のデータの値を $z_1 = x_1 - y_1, \cdots, z_n = x_n - y_n$ とすると

$$V = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (z_k - \overline{z})^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{(x_k - y_k) - (\overline{x} - \overline{y})\}^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{(x_k - \overline{x})^2$$
$$-2(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) + (y_k - \overline{y})^2\}$$

$= s_x{}^2 - 2C + s_y{}^2 = 13 - 2C$

となるから，$0 \leqq C \leqq 6$ も合わせると $\mathbf{1 \leqq V \leqq 13}$ である．

9

数学III【体積】標準

▶解答◀　$z = t$ 上では

$$\frac{10}{3}(x+y+t-7) \geqq x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{t^2}{3} - 7$$

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{y^2}{2} - \frac{10}{3}y \leqq -\frac{t^2}{3} + \frac{10}{3}t - \frac{49}{3}$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{\left(y - \frac{10}{3}\right)^2}{2} \leqq -\frac{t^2}{3} + \frac{10}{3}t - 8$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{\left(y - \frac{10}{3}\right)^2}{2} \leqq \frac{1}{3}\{1-(t-5)^2\}$$

であるから，E と平面 $z = t$ が交わる条件は

$$1-(t-5)^2 \geqq 0$$

$$-1 \leqq t-5 \leqq 1 \qquad \therefore \quad \mathbf{4 \leqq t \leqq 6}$$

である．$4 \leqq t \leqq 6$ において

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-(t-5)^2}$$

とおくと，E の平面 $z = t$ における断面は

$$\frac{\left(x - \frac{5}{3}\right)^2}{T^2} + \frac{\left(y - \frac{10}{3}\right)^2}{(\sqrt{2}T)^2} \leqq 1$$

であり，その断面積を $S(t)$ とおくと

$$S(t) = \pi T \cdot \sqrt{2}T = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\{1-(t-5)^2\}$$

であるから，E の体積は

$$\int_4^6 S(t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\left[t - \frac{1}{3}(t-5)^3\right]_4^6$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi}$$

注意　**【断面積の求め方】**

$a > 0, b > 0$ に対して，楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ によって囲まれた図形の面積は πab であることを用いた．積分してもよいし，縦に $\frac{a}{b}$ 倍して円に変換したあと，それを $\frac{b}{a}$ 倍したと考えてもよい．

10

数学III【微分係数】標準

▶解答◀　$t = \sin x + \cos x$ とおくと，$f(x) = t^{5t+\log t}$ となる．ここで，$g(t) = t^{5t+\log t}$ とおく．微分する際に，ダッシュをつけるが，f にダッシュがついているときは「x について微分する」ことを表し，g にダッシュがついているときは「t について微分する」ことを表すことにする．

$t > 0$ なる範囲において，自然対数をとって

$$\log g(t) = (5t + \log t)\log t$$

両辺を t で微分して

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \left(5 + \frac{1}{t}\right)\log t + (5t + \log t) \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \left(5 + \frac{2}{t}\right)\log t + 5$$

$$g'(t) = \left\{\left(5 + \frac{2}{t}\right)\log t + 5\right\}g(t)$$

である．$x = \frac{\pi}{2}$ のとき，$t = 1$ であり，$g(1) = 1$ も合わせると

$$g'(1) = 7\log 1 + 5 = 5$$

である．また，$\frac{dt}{dx} = \cos x - \sin x$ であるから，

$$f'(x) = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dg}{dt}$$

の両辺に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入して

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \cdot g'(1) = \mathbf{-5}$$

また，2 階微分について

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$= \frac{d^2 t}{dx^2} \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dg}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2 t}{dx^2} \cdot g'(t) + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \cdot g''(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\frac{d^2 t}{dx^2} = -\sin x - \cos x$ であり

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \left(-\frac{2}{t^2}\log t + \left(5 + \frac{2}{t}\right)\frac{1}{t}\right)g(t)$$

$$+\left(\left(5 + \frac{2}{t}\right)\log t + 5\right)g'(t)$$

であるから，

$$g''(1) = (-2\log 1 + 7)g(1) + (7\log 1 + 5)g'(1)$$

$$= 7 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 32$$

となる．よって，① において $x = \frac{\pi}{2}$ を代入して

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)g'(1) + (-1)^2 g''(1)$$

$$= -1 \cdot 5 + 1 \cdot 32 = \mathbf{27}$$

要の分析　山椒は小粒でもピリリと辛い．前半は穏やかだが，後半は思考力を試される良問が並ぶ．これを 90 分で解き切れたら大したものである．問題文が短いのが推しポイントである．

（塩崎，久保寺，安田亨）