東京医科大学・医学部

試験日　2023年2月8日　時間60分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B (数列，ベクトル)

1 （1） ウィルスXに対して陽性または陰性と判定する検査Aに関して次の2つのことがわかっている．

（i） ウィルスXに感染している人に検査Aを実施すると，80%の確率で陽性と判定される．

（ii） ウィルスXに感染していない人に検査Aを実施すると，70%の確率で陰性と判定される．

ある集団において，40%の人がウィルスXに感染していることがわかっている．この集団の人に対して検査Aを行って陽性と判定されたとき，実際にウィルスXに感染している条件付き確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\cdot{}_n\mathrm{C}_k)$ が10000を超えるような最小の正の整数 n は $\square$ である．

（3） i を虚数単位とする．$(1+i)^n$ が正の実数になるような3桁の整数 n は $\square$ 個である．

（4） $f(x)=(1+x)\log(3+x)-(1+x)\log(5+x)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\square$ である．

2 袋の中に，1から8までの番号が書かれたカードが2枚ずつ，合計16枚入っている．この袋から同時に3枚のカードを取り出し，取り出したカードに書かれた数の積を M，和を S とする．

（1） M が素数となる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） M が4の倍数になる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（3） M が8の倍数であるとき，$S<M$ となる条件付き確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

3 座標空間上に4点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(3,0,0)$, $\mathrm{B}(1,2,0)$, $\mathrm{C}(0,2,1)$ があり，Oから平面ABCに垂線OHを下ろす．実数 s,t,u に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

で定まる点Pについて考える．

（1） 四面体OABCの体積は $\square$ である．

（2） s,t,u が，$0\leqq s\leqq 2$, $0\leqq t\leqq 2$, $0\leqq u\leqq 2$ を満たすように動くとき，Pが動く部分の体積は $\square$ である．

（3） s,t,u が，$s+t+u=1$, $0\leqq s$, $0\leqq t$, $0\leqq u$ を満たすように動く．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ である．

4 $x>-1$ において定義された関数 $f(x)=(x-1)\log(x+1)$ と，曲線 $C:y=f(x)$ について考える．

（1） $f''(x)=\dfrac{x+\square}{\left(x+\square\right)^2}$ である．$f'(x)=0$ を満たす実数 x は $\square$ 個ある．

（2） C と x 軸によって囲まれた部分の面積は，$\square\log 2-\dfrac{\square}{\square}$ である．

（3） 点 $(1,f(1))$ における C の接線と，C および y 軸によって囲まれてできる部分の面積は，

$\dfrac{\square}{\square}-\dfrac{\square}{\square}\log 2$ である．

1

（1） 数学A【条件付き確率】基本

▶解答◀ 条件付き確率は「事後確率」であり，時間の経過が重要である．人を一人連れてくる．その人が感染しているか，いないか，検査をしたら陽性と出るか，陰性と出るかで，事前には，全部で 4 通りの事象が起こる．事前確率では，感染していて（確率 0.4）陽性になる確率は 0.4・0.8（表では①)，感染していて（確率 0.4）陰性になる確率は 0.4・0.2，感染しておらず（確率 0.6）陽性になる確率は 0.6・0.3（表では③)，感染しておらず（確率 0.6）陰性になる確率は 0.6・0.7 である．これらは起こりうることであって，起こったことではない．これらの確率の和は 1 である．以上が事前確率である．以下は事後確率である．以下日本語の表現に注意せよ．過去形になる．いま，人を連れてきた．過去形である．検査を実施した．過去形である．陽性と出た．しつこいが，過去形である．患者は，少なからずショックを受ける．そこで，医師のあなたは言ってあげよう．

「大丈夫ですよ．この検査，アバウトだから．今，② と ④ は起こらなかった．今起こったのは，① または ③ であり，本当に感染している確率は

$$\frac{①}{①+③}=\frac{0.32}{0.32+0.18}=\mathbf{\frac{16}{25}}=0.64$$

まあ，6 割なんて，五分五分みたいなものですよ」

患者は安堵することだろう．

感染(0.4)		非感染(0.6)	
+	−	+	−
0.4・0.8	0.4・0.2	0.6・0.3	0.6・0.7
①	②	③	④

注意

厳かな書き方が好きな人のために，記号満載で書くと次のようになる．

ウイルスに感染している事象を X，検査で陽性になる事象を A とする．

$P(X)=0.4$，$P(\overline{X})=0.6$ である．

$$P(X\cap A)=P(X)P_X(A)=0.4\cdot 0.8=0.32$$

$$P(\overline{X}\cap A)=P(\overline{X})P_{\overline{X}}(A)=0.6\cdot 0.3=0.18$$

であるから

$$P(A)=P(X\cap A)+P(\overline{X}\cap A)=0.32+0.18=0.5$$

$$P_A(X)=\frac{P(X\cap A)}{P(A)}=\frac{0.32}{0.5}=\mathbf{\frac{16}{25}}$$

（2） 数学Ⅱ【二項定理】標準

考え方 n 人の国民から k 人の国会議員とその中から 1 人の首相を選ぶとき（${}_n\mathrm{C}_k\cdot k$ 通り），先に首相を選んで（n 通り），残りの $n-1$ 人から $k-1$ 人の議員を選ぶと考えれば，$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ が成り立つ．

▶解答◀ $1\leqq k\leqq n$ のとき

$$k{}_n\mathrm{C}_k=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$n=10$ のとき ① の右辺は $10\cdot 2^9=5120<10000$，$n=11$ のとき ① の右辺は $11\cdot 2^{10}=11\cdot 1024>10000$ であるから，最小の $\boldsymbol{n=11}$ である．

注意 $(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^k$ の両辺を x で微分して

$$n(x+1)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot{}_n\mathrm{C}_kx^{k-1})$$

$x=1$ を代入して，$n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot{}_n\mathrm{C}_k)$ を得る．

（3） 数学Ⅱ【複素数の計算】基本

▶解答◀ $\alpha=1+i$ とおく．

$$\alpha^2=2i,\ \alpha^3=2(i-1),\ \alpha^4=-4,\ \alpha^8=16$$

であるから α^n が正の実数になるのは n が 8 の倍数になるときである．3 桁の 8 の倍数の個数は

$$\left[\frac{999}{8}\right]-\left[\frac{99}{8}\right]=124-12=\mathbf{112}$$

$[x]$ はガウス記号であり，x の小数部分の切り捨てを表す．n, k が自然数で，1 以上 n 以下で k の倍数は $\left[\frac{n}{k}\right]$ 個ある．

◆別解◆ $\alpha=1+i$ とおく．

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\alpha^n=\sqrt{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

が正の実数になる条件は，偏角 $\frac{n\pi}{4}=2m\pi$（m は整数）の形になることで，$n=8m$ となる．（後は省略する）

（4） 数学Ⅲ【関数の極限】標準

考え方 どれだけ注意しておいても，「$x\to\infty$ のとき $-(1+x)\log\frac{5+x}{3+x}\to-\infty\times\log 1$ の形だから 0 です」というお気楽な生徒が後を絶たない．頭の中で，∞, $\log 1$ が数値になっているのだろう．これらは数値ではなく，∞ はとても大きな状態であり，$\log 1$ はとても 0 に近い状態になっている．このままではよく分からないのである．

▶解答◀ $f(x)=(1+x)(\log(3+x)-\log(5+x))$

$$=-(1+x)\log\frac{5+x}{3+x}$$

$$=-(1+x)\log\left(1+\frac{2}{3+x}\right)$$

$$= -\frac{2(1+x)}{3+x}\cdot\frac{3+x}{2}\log\left(1+\frac{2}{3+x}\right)$$
$$= -2\cdot\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{3}{x}+1}\cdot\frac{3+x}{2}\log\left(1+\frac{2}{3+x}\right)$$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\log(1+h)=1$ は公式である．求める極限値は $-2\cdot\frac{0+1}{0+1}\cdot1=\mathbf{-2}$ である．

注意【生徒には上の変形は難しいのか？】

ロピタルの定理を使うように，分数形にする．

$x=\frac{1}{t}$ とおく．$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ である．

$$-(1+x)\log\frac{5+x}{3+x}=-\left(1+\frac{1}{t}\right)\log\frac{5+\frac{1}{t}}{3+\frac{1}{t}}$$
$$=-\frac{(1+t)\log\frac{5t+1}{3t+1}}{t}$$
$$=-\frac{(1+t)\{\log(5t+1)-\log(3t+1)\}}{t}$$

は $t\to+0$ のとき $\frac{0}{0}$ の形になる．分母・分子を微分して，分母の微分は1だから無視して，分子の部分だけ書くと

$$-1\cdot\{\log(5t+1)-\log(3t+1)\}$$
$$-(1+t)\left(\frac{5}{5t+1}-\frac{3}{3t+1}\right)$$

$t\to+0$ とすると $-(0-0)-(5-3)=\mathbf{-2}$ となる．これなら出来るだろうか？

高校時代，私は，ロピタルの定理は封印していた．勿論「教科書に載っていない定理は使ったらあかん」ということではない．ロピタルの定理は便利だから，頼ると，式変形の力の訓練にならないからだ．

2　数学A【条件付き確率】標準

▶解答◀ （1）取り出す3枚のカードの組合せは ${}_{16}C_3=560$ 通りで，M が素数となるのは8枚ある2，3，5，7のカードから1枚，1のカードを2枚とも取り出すときであるから求める確率は

$$\frac{{}_8C_1}{{}_{16}C_3}=\frac{8}{560}=\mathbf{\frac{1}{70}}$$

（2）M が4の倍数となる組合せは偶数の枚数で場合分けして，

（ア）偶数3枚のとき．

8枚のカードから3枚取るから ${}_8C_3=56$ 通り．

（イ）偶数2枚のとき．

8枚の偶数から2枚，8枚の奇数から1枚取るから ${}_8C_2\cdot8=224$ 通り．

（ウ）偶数1枚のとき．

2枚ずつある4または8のカードから1枚，8枚の奇数から2枚取るから $4\cdot{}_8C_2=112$ 通り．

求める確率は $\frac{56+224+112}{560}=\mathbf{\frac{7}{10}}$ である．

（3）取り出す3数を a,b,c（$a\leqq b\leqq c$）（同じ数字のカードは2枚しかないから，2カ所の等号が両方とも成り立つことはない）とする．$S<M$ すなわち $a+b+c<abc$ になることは多い．$M\leqq S$ になるとき，$abc\leqq a+b+c<3c$ となり，$ab<3$ となる．

$(a,b)=(1,1),(1,2)$ である．

$(a,b)=(1,1)$ のとき，$abc\leqq a+b+c$ は $c\leqq2+c$ となり，成り立つ．

$(a,b)=(1,2)$ のとき，$abc\leqq a+b+c$ に代入し $2c\leqq3+c$ となり $c\leqq3$ である．$(a,b)=(1,2)$，$c\leqq3$ では abc は8の倍数にならない．

以上より，M が8の倍数で $M\leqq S$ となるのは取り出すカードの番号が1，1，8のときである．8は2枚あるうちのどちらであるかで2通りある．

M が8の倍数になるのは

（エ）偶数が3枚のとき．（ア）より56通り．

（オ）偶数が2枚のとき．

4の倍数が2枚と奇数が1枚，または，4の倍数が1枚と2または6が1枚と奇数が1枚であるから

$({}_4C_2+4\cdot4)\cdot8=176$ 通り．

（カ）偶数が1枚のとき．

8を1枚と奇数を2枚取るから，$2\cdot{}_8C_2=56$ 通り．

以上より，M が8の倍数である3枚のカードの組合せは $56+176+56=288$ 通りある．これらのうち，$M\leqq S$ となるものが2通りあるから求める確率は

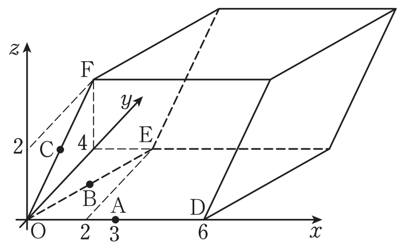
$\frac{288-2}{288}=\mathbf{\frac{143}{144}}$ である．

注意【余事象について】

4の倍数，8の倍数のときは．余事象を考えても，あまり意味はない．

3　数学B【平面の方程式】標準

▶解答◀ （1）$\triangle$OAB を底面と見て，四面体 OABC の体積は $\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{1}$ である．



（2）$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，

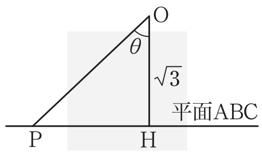
D(6, 0, 0)，E(2, 4, 0)，F(0, 4, 2) であり，P は図のように O，D，E，F を頂点とする平行六面体を作る．求める体積は $6\cdot4\cdot2=\mathbf{48}$ である．

（**3**）　A，B，C いずれの点も x 座標，y 座標，z 座標の和は 3 であるから 3 点は平面 $x+y+z=3$ 上にある．よって，O から下ろした垂線の足は $x=y=z$ を満たす直線上にあるから H の座標は (1, 1, 1) である．

$\cos\theta$ が最小になるのは θ が最大となるときで，OP が最大になるときである．△ABC の周上または内部の点で O から最も遠い点は頂点 A，B，C のいずれかである．

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\ \mathrm{OC}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

P = A のとき OP は最大になるから，$\cos\theta$ の最小値は $\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ である．



別解　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3k+l,\ 2l+2m,\ m)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2, 2, 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3, 2, 1)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が垂直になるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2(3k+l)+2(2l+2m)=0$$

$$-3k+l+2m=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-3(3k+l)+2(2l+2m)+m=0$$

$$-9k+l+5m=0 \quad \cdots\cdots②$$

①，② を連立して，$l=-k,\ m=2k$ を得て

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2k,\ 2k,\ 2k)$$

H は平面 ABC 上にあるから $l=-k,\ m=2k$ を $k+l+m=1$ に代入して

$$k-k+2k=1 \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

H(1, 1, 1) である．以降は本解と同様である．

4　数学III【面積】標準

▶解答◀　（**1**）　$f(x)=(x-1)\log(x+1)$

$$f'(x)=\log(x+1)+\frac{x-1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}=\boldsymbol{\frac{x+3}{(x+1)^2}}$$

$x>-1$ のとき $f''(x)>0$ であるから，$f'(x)$ は増加関数である．$f'(0)=-1<0$，$f'(1)=\log2>0$ であるから $f'(x)=0$ を満たす実数 x は **1** 個ある．

（**2**）　$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha$ とおくと，$-1<x<\alpha$ のとき $f'(x)<0$ であるから $f(x)$ は減少，$\alpha<x$ のとき $f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は増加する．$f(x)=0$ の解は $x=0, 1$ であるから曲線 C の概形は図のようになる．

求めるのは図の網目部分の面積 S_1 である．

$$S_1=-\int_0^1(x-1)\log(x+1)\,dx$$

$t=x+1$ とおくと，$dt=dx$，$1\leqq t\leqq2$ であるから

$$S_1=-\int_1^2(t-2)\log t\,dt$$

$$=-\int_1^2\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)'\log t\,dt$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)\log t\right]_1^2$$

$$+\int_1^2\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)(\log t)'\,dt$$

$$=2\log2+\int_1^2\left(\frac{1}{2}t-2\right)dt$$

$$=2\log2+\left[\frac{1}{4}t^2-2t\right]_1^2$$

$$=2\log2+\left(\frac{3}{4}-2\right)=\boldsymbol{2\log2-\frac{5}{4}}$$

（**3**）　$f(1)=0$，$f'(1)=\log2$ であるから，接線の方程式は

$$y=(\log2)(x-1)$$

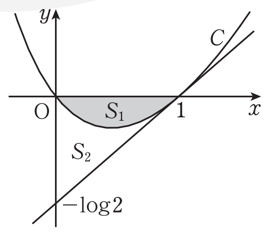
$$y=(\log2)x-\log2$$

求める面積を S_2 とすると，S_2 は三角形の面積から S_1 を引いたものである．

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\log2-S_1$$

$$=\frac{1}{2}\log2-\left(2\log2-\frac{5}{4}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\log2}$$



要の分析　問題形式は昨年と変わらない．数IIIの計算が減った分易しくなった．

（茅嶋，坂本賀，安田亨）