昭和大学・医学部 II 期

試験日　2023 年 3 月 4 日　時間 140 分（2 科目合わせて，国語との選択）　数学I 数学II 数学III 数学A 数学B

1（1） n は自然数とする．次の数列から一般項 a_n を推測し，一般項 a_n を n の式で表せ．

（i） 1, 2, 6, 15, 31, 56, 92, 141, 205, 286, …

（ii） 1, 2, 10, 37, 101, 226, 442, 785, 1297, 2026, …

（2） n は自然数とする．漸化式 $a_1=4,\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n+8$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

（3） n は自然数とする．漸化式 $a_1=-2,\ a_{n+1}=5-\dfrac{4}{a_n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

（i） 一般項 a_n を n の式で表せ．

（ii） $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

2（1） $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ の整数部分を a，小数部分を b とする．次の問いに答えよ．

（i） a の値を求めよ．

（ii） $b^4+3b^3-4b^2+6b+1$ の値を求めよ．

（2） 整式 x^{2023} を x^2+x+1 で割った余りを求めよ．

（3） O を原点とする座標空間上に 4 点 A(3, 5, 1), B(2, 4, 1), C(2, 3, −2), D(1, x, −1) をとる．これらの点が同一平面上にあるとき，x の値を求めよ．

（4） α, β は実数とする．O を原点とする座標平面上に $\vec{a}=(3,2),\ \vec{b}=(-1,2)$ をとる．点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\ 2|\alpha|+3|\beta| \leqq 6$ を満たしながら座標平面上を動く．このとき，点 P が動くことのできる領域の面積 S を求めよ．

3 xy 平面上で，曲線 $x^2+3y^2=2$ を曲線 ① とする．曲線 ① を原点 O(0, 0) を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した曲線を曲線 ② とする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（1） 曲線 ① を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ．

（2） 曲線 ② の方程式を x, y を用いて表せ．

（3） 曲線 ② 上の点の x 座標がとりうる値の範囲を求めよ．

（4） 曲線 ② と x 軸，y 軸との交点の座標をすべて求めよ．

（5） 曲線 ② を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

4 xy 平面上で，原点 O(0, 0) を出発点として動く点 P がある．点 P はコインを投げて表が出たら x 軸方向に 1 だけ進み，裏が出たら y 軸方向に 1 だけ進む．ただし，コインは表裏どちらの面が出る確率も同様に確からしいものとする．

（1） 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（i） 9 回コインを投げたときに，座標 A(5, 4) に到達する確率を求めよ．

（ii） 9 回コインを投げたときに，座標 B(2, 2) を通り，座標 A(5, 4) に到達する確率を求めよ．

（iii） 9 回コインを投げたときに，座標 B(2, 2) と座標 C(4, 3) を通り，座標 A(5, 4) に到達する確率を求めよ．

（2） $x=5$ に到達したらその後は表が出ても，裏が出ても y 軸方向に 1 だけ進むものとし，$y=4$ に到達したらその後は表が出ても，裏が出ても x 軸方向に 1 だけ進むものとする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（i） 9 回コインを投げたときに，座標 A(5, 4) に到達する確率を求めよ．

（ii） 9 回コインを投げたときに，座標 B(2, 2) を通り，座標 A(5, 4) に到達する確率を求めよ．

（iii） 9 回コインを投げたときに，座標 D(2, 4) を通り，座標 A(5, 4) に到達する確率を求めよ．

1 （1）数学B【数列の雑題】標準

▶解答◀ （i） 数列 $\{a_n\}$ の階差数列は

$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \cdots$

であり，その一般項は n^2 と推測できる．$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

（ii） 数列 $\{a_n\}$ の階差数列は

$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ \cdots$

であり，その一般項は n^3 と推測できる．$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = 1 + \frac{1}{4}n^2(n-1)^2$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(n^4 - 2n^3 + n^2 + 4)}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

（2）数学B【漸化式】標準

▶解答◀ $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ とおく．$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 8$ より

$$S_{n+1} = 4a_n + 8 \quad \cdots\cdots①$$

$$S_{n+2} = 4a_{n+1} + 8 \quad \cdots\cdots②$$

②－① より

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \cdots\cdots③$$

特性方程式 $t^2 = 4t - 4$ を解く．

$$(t-2)^2 = 0 \qquad \therefore \quad t = 2$$

よって ③ は次のように変形できる．

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n) \quad \cdots\cdots④$$

ここで ① より

$$S_2 = 4a_1 + 8$$

$$a_2 + 4 = 4 \cdot 4 + 8 \qquad \therefore \quad a_2 = 20$$

④ より，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1) \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 3$$

数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ は公差 3 の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + 3(n-1) = 3n - 1$$

$$a_n = \boldsymbol{(3n-1) \cdot 2^n}$$

（3）数学III【数列の極限】標準

▶解答◀ （i） $a_{n+1} = 5 - \frac{4}{a_n}$ より

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{a_n}$$

特性方程式 $t = \frac{5t-4}{t}$ を解く．

$$t^2 = 5t - 4$$

$$(t-1)(t-4) = 0 \qquad \therefore \quad t = 1,\ 4$$

$$a_{n+1} - 1 = \frac{5a_n - 4}{a_n} - 1$$

$$a_{n+1} - 1 = \frac{4(a_n - 1)}{a_n} \quad \cdots\cdots①$$

ある n に対して $a_{n+1} = 1$ になることがあると仮定すると左辺が 0 だから右辺も 0 で，$a_n = 1$ となり，これを繰り返すと $a_{n+1} = 1,\ a_n = 1,\ a_{n-1} = 1,\ \cdots,\ a_1 = 1$ となるが，これは $a_1 = -2$ と矛盾する．よって，常に $a_{n+1} \neq 1$ である．

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n}{4(a_n - 1)}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n - 1 + 1}{4(a_n - 1)}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{4(a_n - 1)} + \frac{1}{4}$$

$b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}$$

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{ b_n - \frac{1}{3} \right\}$ は公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$b_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} = \frac{4^{n-1} - 2}{3 \cdot 4^{n-1}}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} + 1 = \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{4^{n-1} - 2} + 1 = \boldsymbol{\frac{4^n - 2}{4^{n-1} - 2}}$$

（ii） $a_n = \frac{4(4^{n-1} - 2) + 6}{4^{n-1} - 2} = \frac{6}{4^{n-1} - 2} + 4$

よって $\lim_{n \to \infty} a_n = \boldsymbol{4}$

注意 （i）の特性方程式の解が $t = 1,\ 4$ であるから

$$b_n = \frac{1}{a_n - 4},\ b_n = \frac{a_n - 4}{a_n - 1}$$

などとおいても解くことができる．

◆別解◆ （i） $b_n = \frac{a_n - 4}{a_n - 1}$ とおく．

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 4}{a_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5a_n - 4}{a_n} - 4}{\frac{5a_n - 4}{a_n} - 1}$$

$$= \frac{5a_n - 4 - 4a_n}{5a_n - 4 - a_n} = \frac{a_n - 4}{4(a_n - 1)}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は等比数列で

$$b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} b_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{a_1 - 4}{a_1 - 1}$$

$$\frac{a_n - 4}{a_n - 1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$4^{n-1}a_n-4^n=2a_n-2$

$a_n=\boldsymbol{\dfrac{4^n-2}{4^{n-1}-2}}$

2

（1） 数学II【多項式の除法】標準

▶解答◀ （i） $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$

$=\dfrac{1}{8}(1+3\sqrt{5}+3\cdot5+5\sqrt{5})=2+\sqrt{5}$

$2<\sqrt{5}<3$ であるから，$a=\boldsymbol{4}$ である．

（ii） $b=(2+\sqrt{5})-4=\sqrt{5}-2$

$b+2=\sqrt{5}$ であるから

$(b+2)^2=5$

$b^2+4b-1=0$

$x^4+3x^3-4x^2+6x+1$ を x^2+4x-1 で割ったときの商 x^2-x+1 と余り $x+2$ を利用して

$b^4+3b^3-4b^2+6b+1$

$=(b^2+4b-1)(b^2-b+1)+b+2$

$=(\sqrt{5}-2)+2=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

（2） 数学II【多項式の除法】標準

▶解答◀ $x^3=1$ すなわち $(x-1)(x^2+x+1)=0$ の虚数解の 1 つを ω とおくと，$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$ である．x^{2023} を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおく．$a,\ b$ は実数である．

$x^{2023}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$

$x=\omega$ を代入する．$\omega^{2023}=\omega^{3\cdot674}\cdot\omega=\omega$ であるから

$\omega=a\omega+b \qquad \therefore\ \ a=1,\ b=0$

求める余りは $\boldsymbol{x}$ である．

◆別解◆ $x^{2023}=x^{2023}-x+x=x(x^{3\cdot674}-1)+x$

$x^3=A$ とおくと

$x^{3\cdot674}-1=A^{674}-1$

$=(A-1)(A^{673}+A^{672}+A^{671}+\cdots+1)$

$A-1=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ であるから $x^{3\cdot674}-1$ は x^2+x+1 で割り切れる．よって，求める余りは $\boldsymbol{x}$ である．

（3） 数学B【ベクトルと図形（空間）】基本

▶解答◀ 4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

と書くことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-2,\ x-5,\ -2)$

$s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s(-1,\ -1,\ 0)+t(-1,\ -2,\ -3)$

$=(-s-t,\ -s-2t,\ -3t)$

よって

$-s-t=-2,\ -s-2t=x-5,\ -3t=-2$

$t=\dfrac{2}{3},\ s=\dfrac{4}{3}$ であり，$x=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$ である．

（4） 数学B【ベクトルと図形（平面）】標準

▶解答◀ $2|\alpha|+3|\beta|\leqq6$ より

$\dfrac{|\alpha|}{3}+\dfrac{|\beta|}{2}\leqq1$ ……………………①

① を満たす領域を $\alpha\beta$ 平面上に表すと図 1 のひし形の周と内部になる．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ ……………………②

② において $(\alpha,\ \beta)=(3,\ 0),\ (0,\ 2),\ (-3,\ 0),\ (0,\ -2)$ のときの P をそれぞれ A，B，C，D とおく．①，② を満たす P の存在領域は図 2 の平行四辺形 ABCD の周と内部である．

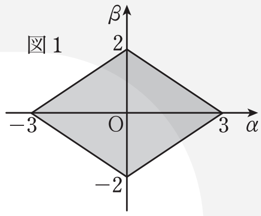
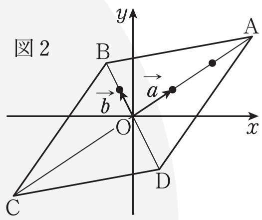
図 1


図 2


A(9, 6), B(−2, 4) であるから

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\left|9\cdot4-6\cdot(-2)\right|=24$

S は平行四辺形 ABCD の面積であるから

$S=4\triangle\mathrm{OAB}=4\cdot24=\boldsymbol{96}$

3

数学III【体積】標準

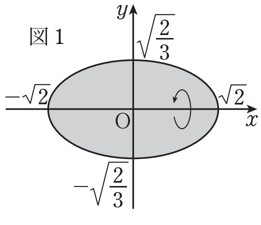
▶解答◀ （1） $x^2+3y^2=2$ より

$y^2=\dfrac{1}{3}(2-x^2)$

$V_1=2\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}y^2\,dx=\dfrac{2}{3}\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,dx$

$=\dfrac{2}{3}\pi\left[2x-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)$

$=\boldsymbol{\dfrac{8}{9}\sqrt{2}\pi}$

図 1


（2） 複素数平面で考える．

$x+yi$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる点を $X+Yi$ とする．

$$X+Yi=(x+yi)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x+yi=(X+Yi)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=(X+Yi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(X+Y)+(Y-X)i\}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y-X)$$

① に代入して

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2+\frac{3}{2}(Y-X)^2=2$$

$$4X^2-4XY+4Y^2=4$$

$$X^2-XY+Y^2=1$$

② の方程式は $\boldsymbol{x^2-xy+y^2=1}$ ……………………③

（３） ③ を y の２次方程式とみる．

$$y^2-xy+x^2-1=0 \quad \cdots\cdots④$$

判別式を D とする．y は実数であるから

$$D=x^2-4(x^2-1)\geqq 0$$

$$3x^2-4\leqq 0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

（４） ③ に $y=0$ を代入して

$$x^2=1 \qquad \therefore\quad x=\pm 1$$

③ に $x=0$ を代入して

$$y^2=1 \qquad \therefore\quad y=\pm 1$$

② と x 軸との交点の座標は $\boldsymbol{(1,\,0),\,(-1,\,0)}$

② と y 軸との交点の座標は $\boldsymbol{(0,\,1),\,(0,\,-1)}$

（５） ④ より $y=\dfrac{x\pm\sqrt{4-3x^2}}{2}$

$f(x)=\dfrac{x+\sqrt{4-3x^2}}{2}$, $g(x)=\dfrac{x-\sqrt{4-3x^2}}{2}$ とし，$\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ とする．（３），（４）より曲線 ② は図２のようになる．② の x 軸より下方を x 軸に関して折り返した図形（図３）で考える．これは y 軸に関して対称であるから $0\leqq x\leqq\alpha$ の部分について考える．$0\leqq x\leqq 1$ の部分の回転体の体積を V_3，$1\leqq x\leqq\alpha$ の部分の回転体の体積を V_4 とする．

図２

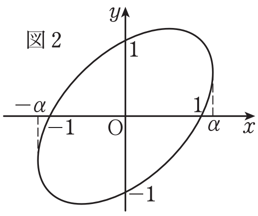
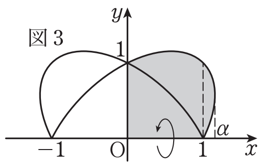


図３



$$\frac{V_3}{\pi}=\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(2-x^2+x\sqrt{4-3x^2})\,dx$$

この積分記号の中は

$$2-x^2-\frac{(4-3x^2)'}{6}(4-3x^2)^{\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\frac{2V_3}{\pi}=\left[\,2x-\frac{x^3}{3}-\frac{(4-3x^2)^{\frac{3}{2}}}{9}\,\right]_0^1$$

$$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=\frac{22}{9}$$

$$V_3=\frac{11}{9}\pi$$

また

$$(f(x))^2-(g(x))^2=x\sqrt{4-3x^2}$$

$$=-\frac{(4-3x^2)'}{6}(4-3x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{V_4}{\pi}=\int_1^\alpha\{(f(x))^2-(g(x))^2\}\,dx$$

$$=\int_1^\alpha\left\{-\frac{(4-3x^2)'}{6}(4-3x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{(4-3x^2)^{\frac{3}{2}}}{9}\right]_1^\alpha=\frac{1}{9}$$

$$V_4=\frac{1}{9}\pi$$

求める体積は

$$V_2=2(V_3+V_4)=2\pi\left(\frac{11}{9}+\frac{1}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$$

4 数学A【独立試行・反復試行の確率】標 準

▶解答◀ 表が出る回数を n，裏が出る回数を m とする．この確率は ${}_{n+m}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+m}$ である．

（１）（ｉ） O から A に到達するのは，$(n,\,m)=(5,\,4)$ のときであるから，求める確率は

$${}_9\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^9=126\cdot\frac{1}{2^9}=\boldsymbol{\frac{63}{256}}$$

（ii） O から B に到達するのは，$(n,\,m)=(2,\,2)$ のときであり，B から A に到達するのは，$(n,\,m)=(3,\,2)$ のときであるから，求める確率は

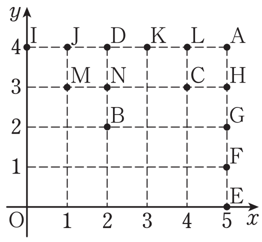
$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5=6\cdot 10\cdot\frac{1}{2^9}=\boldsymbol{\frac{15}{128}}$$

（iii） O から B に到達するのは，$(n,\,m)=(2,\,2)$ のときであり，B から C に到達するのは，$(n,\,m)=(2,\,1)$ のときであり，C から A に到達するのは，$(n,\,m)=(1,\,1)$ のときであるから，求める確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=6\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2^9}=\boldsymbol{\frac{9}{128}}$$

（２） 図のように点を取る．



（ i ） 8 回コインを投げる途中で 5 回目の表が出たとき，P は E，F，G，H のいずれかに到達する．その後は y 軸方向に進み必ず A に到達する．

8 回コインを投げる途中で 4 回目の裏が出たとき，P は I，J，D，K，L のいずれかに到達する．その後は x 軸方向に進み必ず A に到達する．

よって，求める確率は **1** である．

（**ii**） A には必ず到達するから，O から B に到達する確率を求める．$(n, m)=(2, 2)$ のときであるから

$$ {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=6\cdot\frac{1}{2^4}=\boldsymbol{\frac{3}{8}} $$

（**iii**） O から D に到達する確率を求める．

P が最初に直線 $y=4$ 上の点に到達するのが I，J，D のいずれなのかによって場合分けする．

（ア） I のとき，P は O → I → D と移動する．

O から I に到達するのは，$(n, m)=(0, 4)$ のときであり，I から D には必ず到達する．

（イ） J のとき，P は O → M → J → D と移動する．

O から M に到達するのは，$(n, m)=(1, 3)$ のときであり，M から J に到達するのは，$(n, m)=(0, 1)$ のときであり，J から D には必ず到達する．

（ウ） D のとき，P は O → N → D と移動する．

O から N に到達するのは，$(n, m)=(2, 3)$ のときであり，N から D に到達するのは，$(n, m)=(0, 1)$ のときである．

よって，求める確率は

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{2} $$
$$ =\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{32}+10\cdot\frac{1}{64}=\boldsymbol{\frac{11}{32}} $$

要の分析　**1** の（3）を除けば，**1**，**2** は標準的な小問集合である．**3**，**4** は後半に計算量の多い設問や丁寧な考察が必要な問題が含まれている．

（中谷，小林ゆ，藤内，長島，安田亨）