昭和大学・医学部Ⅰ期

試験日　2023年2月4日　時間140分（2科目合わせて，国語との選択）　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B

1　i を虚数単位として，複素数 $z=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ を考える．次の $\square$ を適切な数値で埋めよ．ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ．

$w=z+z^3$ とし，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す．このとき $w+\overline{w}=\square$ である．$w\cdot\overline{w}$ の実部は $\square$ であり，虚部は $\square$ である．点 z^2 と z^3 を焦点とし，焦点からの距離の差の大きさが z^2 の虚部で定まる双曲線を考える．この双曲線の漸近線の傾きの絶対値は $\square$ である．

2　（1）　実数 a,b,c が

$$a+b+c=8,\ a^2+b^2+c^2=32$$

を満たすとき，c のとりうる範囲を不等式を用いて表せ．

（2）　次の不等式を満たす実数 x の範囲を求めよ．

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \leqq 21\left(\frac{1}{2}\right)^x-20$$

（3）　同一平面上にあるベクトル $\vec{a},\vec{b}$ は $|\vec{a}+3\vec{b}|=5,\ |3\vec{a}-\vec{b}|=5$ をみたすように動く．このとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の値がとりうる範囲を不等式を用いて表せ．

（4）　a,b は1より大きく相異なる実数とする．次の問いに答えよ．

（i）　$x=\log_a\sqrt{ab},\ y=\log_{\sqrt{ab}}b$ とする．x,y の大小関係を不等式を用いて表せ．

（ii）　$w=\log_{\frac{a+b}{2}}b$ とする．y,w の大小関係を不等式を用いて表せ．

（iii）　$z=\log_a\dfrac{a+b}{2}$ とする．x,y,w,z の大小関係を不等式を用いて表せ．

3　xy 平面上で，直線 $y=\dfrac{3}{4}x$ を①，第1象限上かつ直線①上に存在し，原点 O(0, 0) から距離5の点を A とする．また，軸が y 軸に平行で，A を通り，原点 O で①と交わる放物線を②とする．ただし，放物線②の原点 O における接線は直線①と直交する．さらに，放物線②上で OA 間に存在する点を P とし，その x 座標を p とする．点 P を通り直線①と直交する直線と直線①との交点を B として，線分 PB の長さを h とし，線分 OB の長さを t とする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（1）　点 A の座標を求めよ．

（2）　放物線②の方程式を x,y を用いて表せ．

（3）　h を p を用いて表せ．

（4）　t を p を用いて表せ．

（5）　直線①と放物線②で囲まれる範囲について，直線①を軸として回転したときにできる立体の体積を V とする．体積 V を求めよ．

4　1から n までの自然数を重複なく1枚に1つずつ記した n 枚のカードを用意した．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（1）　n 枚のカードから同時に2枚のカードを選ぶ．カードに記された数字の和が $n+1$ より小さい場合が何通りあるか調べたい．

（i）　$n=8$ のとき何通りあるか．

（ii）　$n=9$ のとき何通りあるか．

（iii）　n が偶数のとき何通りあるか．

（iv）　n が奇数のとき何通りあるか．

（2）　p は自然数とする（$p<n$）．n 枚のカードから p と $p+1$ が記された計2枚のカードを抜き出した．残ったカードに記された自然数を全て合計すると2023となった．このときの自然数 p と n とを求めよ．

1 数学Ⅲ【複素数と図形】標 準

▶解答◀　$1, z, z^2, z^3, z^4$ は図1のように正五角形の頂点となる．z と z^4，z^2 と z^3 は共役な複素数である．$z^5=1$ であるから，$z^5-1=0$

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$z \neq 1$ であるから，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ として，以下で使用する値を求めておく．

$2\theta=2\pi-3\theta$ であるから

$$\cos 2\theta=\cos(2\pi-3\theta)=\cos 3\theta$$

$$2\cos^2\theta-1=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$$

$$(\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$$

$0<\cos\theta<1$ より $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$$

$$=\frac{1}{8}(6-2\sqrt{5})-1=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ここで

$$w+\overline{w}=z+z^3+\overline{(z+z^3)}$$

$$=z+z^3+z^4+z^2=\mathbf{-1}$$

$$w\cdot\overline{w}=(z+z^3)\overline{(z+z^3)}$$

$$=(z+z^3)(z^4+z^2)=z^5+z^3+z^7+z^5$$

$$=z^2+z^3+2=2\cos 2\theta+2$$

$$=-2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}+2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

よって，$w\cdot\overline{w}$ の実部は $\mathbf{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$，虚部は $\mathbf{0}$ である．

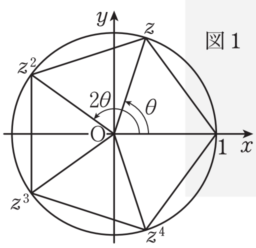


図1

z^2 と z^3 を焦点とし，焦点からの距離の差が z^2 の虚部である双曲線を C とする．

$$C:\frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,\ b>0$$

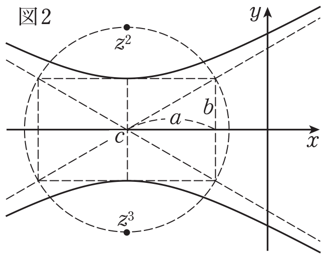
とおける．$c=\cos\dfrac{4\pi}{5}$ である．

$$a^2+b^2=\sin^2 2\theta,\ 2b=\sin 2\theta$$

であり，$b=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta$

漸近線の傾きの絶対値は $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

図2



2 （1） 数学Ⅱ【解と係数の関係】標 準

▶解答◀　$a+b+c=8$ より

$$a+b=8-c \quad \cdots\cdots①$$

$a^2+b^2+c^2=32$ より，$(a+b)^2-2ab+c^2=32$

$$2ab=(8-c)^2+c^2-32$$

$$ab=c^2-8c+16 \quad \cdots\cdots②$$

①，② より，a, b は2次方程式

$x^2-(8-c)x+c^2-8c+16=0$ の実数解である．判別式を D とすると，$D=(8-c)^2-4(c^2-8c+16) \geqq 0$

$$-3c^2+16c \geqq 0$$

$$c(3c-16) \leqq 0 \qquad \therefore\ \ \mathbf{0 \leqq c \leqq \frac{16}{3}}$$

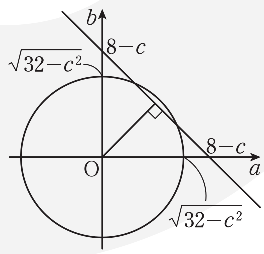
♦別解♦　直線と円が共有点をもつ条件を考える．ただし $32-c^2=0$ のときには潰れた円と考える．

$$a+b=8-c,\ a^2+b^2=32-c^2$$

$32-c^2 \geqq 0$ のときで $\dfrac{|8-c|}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{32-c^2}$

$$64-16c+c^2 \leqq 64-2c^2$$

$$3c^2-16c \leqq 0 \qquad \therefore\ \ \mathbf{0 \leqq c \leqq \frac{16}{3}}$$



国公立大編の防衛医大の空間座標でこれを用いて計算を軽減できる設問がある．

（2） 数学Ⅲ【指数・対数不等式】標 準

▶解答◀　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^x \leqq 21\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-20$ より

$$1 \leqq 21\cdot 4^x-20\cdot 8^x$$

$$20\cdot 8^x-21\cdot 4^x+1 \leqq 0$$

$2^x=X$ とおくと，$20X^3-21X^2+1 \leqq 0$

$$(5X+1)(4X-1)(X-1) \leqq 0$$

$X>0$ であるから，$\dfrac{1}{4} \leqq X \leqq 1$

$$2^{-2} \leqq 2^x \leqq 2^0 \qquad \therefore\ \ \mathbf{-2 \leqq x \leqq 0}$$

(3) 数学B【平面ベクトルの演算】標準

▶解答◀ $\vec{a}+3\vec{b}=\vec{p},\ 3\vec{a}-\vec{b}=\vec{q}$ とおくと，$|\vec{p}|=5,\ |\vec{q}|=5$ であり，$\vec{a}=\dfrac{1}{10}(\vec{p}+3\vec{q})$，$\vec{b}=\dfrac{1}{10}(3\vec{p}-\vec{q})$ である．

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\frac{1}{10}|(\vec{p}+3\vec{q})+(3\vec{p}-\vec{q})|=\frac{1}{5}|2\vec{p}+\vec{q}|$$

$|2\vec{p}|>|\vec{q}|$ であるから三角不等式より

$$|2\vec{p}|-|\vec{q}|\leqq|2\vec{p}+\vec{q}|\leqq|2\vec{p}|+|\vec{q}|$$

$$5\leqq|2\vec{p}+\vec{q}|\leqq 15$$

$$\boldsymbol{1\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq 3}$$

注意 1°【大きさの計算をする】

私の生徒では，三角不等式を使える人がほとんどいない．だから，忘れたときにはどうするかも教えておかないといけない．

$\vec{p},\vec{q}$ のなす角を θ とする．

$$|2\vec{p}+\vec{q}|^2=4|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{q}$$
$$=5\cdot5^2+4|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta=125+100\cos\theta$$

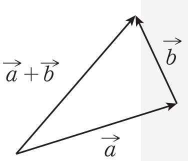
$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから $25\leqq|2\vec{p}+\vec{q}|^2\leqq 225$

$5\leqq|2\vec{p}+\vec{q}|\leqq 15$ となる．

2023年では，久留米大には同系統の問題がある．

2°【三角不等式・ベクトルの場合】

$$\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



右の等号は $\vec{a},\vec{b}$ が同じ向きに平行のときに成り立つ．左の等号は $\vec{a},\vec{b}$ が逆向きに平行のときに成り立つ．ただし「$\vec{0}$ の方向は定義できない」という記述が見られることがあるが，それは「なす角を求める」ときの話で，なす角を求める必要がないときには，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと同じ向きに平行で，すべてのベクトルと逆向きに平行であると定義する．内積が関係するときは，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であると定義する．場面に合わせてできるだけ簡潔に表現する立場をとる．たとえば $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のときは，大学入試では「$\vec{a},\vec{b}$ は垂直である」と表現する．

(4) 数学Ⅱ【指数・対数不等式】標準

▶解答◀ a,b は1より大きく相異なる実数であるから $\log_a b>0,\ \log_a b\neq 1$ である．

(i) $x-y=\log_a\sqrt{ab}-\log_{\sqrt{ab}}b$

$$=\log_a\sqrt{ab}-\frac{\log_a b}{\log_a\sqrt{ab}}$$
$$=\frac{1}{2}(\log_a b+1)-\frac{2\log_a b}{\log_a b+1}$$
$$=\frac{(\log_a b+1)^2-4\log_a b}{2(\log_a b+1)}=\frac{(\log_a b-1)^2}{2(\log_a b+1)}>0$$

よって，$\boldsymbol{x>y}$

(ii) $y=\log_{\sqrt{ab}}b=\dfrac{\log_a b}{\log_a\sqrt{ab}}$

$$w=\log_{\frac{a+b}{2}}b=\frac{\log_a b}{\log_a\dfrac{a+b}{2}}$$

a,b は1より大きく相異なる実数であるから，相加相乗平均の不等式より，$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>1$

$$0<\log_a\sqrt{ab}<\log_a\frac{a+b}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$\boldsymbol{y>w}$

(iii) ① より $z>x$ で，これと (i)，(ii) の結果より

$$\boldsymbol{z>x>y>w}$$

3

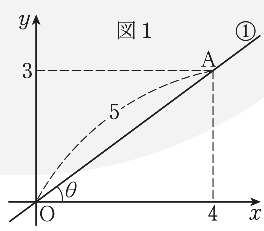
数学Ⅲ【体積】標準

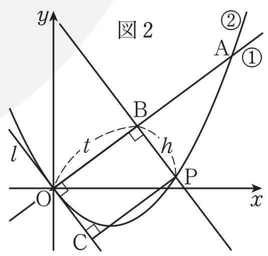
▶解答◀ **(1)** A は第1象限の ① 上の点であり，① の傾きが $\dfrac{3}{4}$，OA $=5$ であるから，**A(4, 3)** である．図1を見よ．なお，① が x 軸となす角を θ とする．これは別解で用いる．

(2) ② は原点を通るからその方程式を $y=ax^2+bx$ とおく．$y'=2ax+b$ である．② の原点における接線を l とすると，傾きは b である．l は ① と直交するから $b=-\dfrac{4}{3}$ である．② は A を通るから

$$3=16a-\frac{16}{3}\qquad\therefore\quad a=\frac{25}{48}$$

よって，② の方程式は $\boldsymbol{y=\dfrac{25}{48}x^2-\dfrac{4}{3}x}$





(3) P は OA 間に存在するから $0\leqq p\leqq 4$

① の方程式は $3x-4y=0$

h は P と ① の距離であるから

$$h=\frac{\left|3p-4\left(\dfrac{25}{48}p^2-\dfrac{4}{3}p\right)\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$=\frac{\left|-\dfrac{25}{12}p^2+\dfrac{25}{3}p\right|}{5}$$
$$=\frac{5}{12}|4p-p^2|=\boldsymbol{\frac{5}{12}p(4-p)}$$

（4）Pからlに垂線PCを下ろす．四角形PBOCは長方形である．$t=\mathrm{OB}=\mathrm{CP}$

tはPと$l:4x+3y=0$の距離であるから

$$t=\frac{\left|4p+3\left(\frac{25}{48}p^2-\frac{4}{3}p\right)\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\left|\frac{25}{16}p^2\right|}{5}=\boldsymbol{\frac{5}{16}p^2}$$

（5）（4）の結果より $\dfrac{dt}{dp}=\dfrac{5}{8}p$

t	$0\ \to\ 5$
p	$0\ \to\ 4$

$$V=\int_0^5 \pi h^2\,dt=\pi\int_0^4 h^2\cdot\frac{dt}{dp}\,dp$$
$$=\pi\int_0^4\left\{\frac{5}{12}p(4-p)\right\}^2\cdot\frac{5}{8}p\,dp$$
$$=\frac{5^3}{12^2\cdot8}\pi\int_0^4 p^3(4-p)^2\,dp$$
$$=\frac{5^3}{12^2\cdot8}\pi\int_0^4(p^5-8p^4+16p^3)\,dp$$
$$=\frac{5^3}{12^2\cdot8}\pi\left[\frac{1}{6}p^6-\frac{8}{5}p^5+4p^4\right]_0^4$$
$$=\frac{5^3}{12^2\cdot8}\pi\cdot4^5\left(\frac{1}{6}\cdot4-\frac{8}{5}+1\right)$$
$$=\frac{5^3\cdot8}{3^2}\pi\cdot\frac{1}{15}=\boldsymbol{\frac{200}{27}\pi}$$

♦別解♦（5）斜回転の公式を用いる．

図1より $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ であるから

$$V=\pi\cos\theta\int_0^4\left\{\frac{3}{4}x-\left(\frac{25}{48}x^2-\frac{4}{3}x\right)\right\}^2dx$$
$$=\frac{4}{5}\pi\int_0^4\left(\frac{25}{48}x^2-\frac{25}{12}x\right)^2dx$$
$$=\frac{4}{5}\pi\cdot\frac{25^2}{48^2}\int_0^4(x^2-4x)^2\,dx$$
$$=\frac{5^3}{2^6\cdot3^2}\pi\int_0^4(x^4-8x^3+16x^2)\,dx$$
$$=\frac{5^3}{2^6\cdot3^2}\pi\left[\frac{1}{5}x^5-2x^4+\frac{16}{3}x^3\right]_0^4$$
$$=\frac{5^3}{2^6\cdot3^2}\pi\cdot2\cdot4^4\left(\frac{2}{5}-1+\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{5^3\cdot2^3}{3^2}\pi\cdot\frac{1}{15}=\boldsymbol{\frac{200}{27}\pi}$$

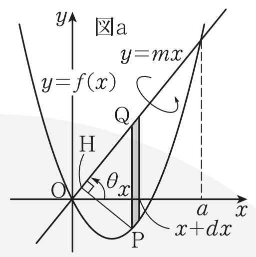
注意 **1°【斜回転の体積の公式】**θは鋭角，$m=\tan\theta$，$a>0$として，$0<x<a$で$f(x)\neq mx$とする．2直線$x=0$，$x=a$，$y=mx$と$y=f(x)$で囲まれた図形を直線$y=mx$のまわりに回転してできる立体の体積Vは

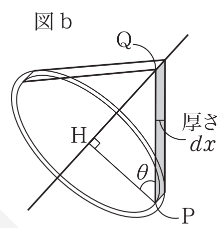
$$V=\pi\cos\theta\int_0^a\{f(x)-mx\}^2\,dx$$

証明はいくつかあるが，今回は1つだけ記そう．

2°【傘型分割】図bの網目部分（$y=mx$と$y=f(x)$の間でxと$x+dx$の間の部分）を回転した厚さdxの傘型の部分を，PQに沿って切り，半径が$|f(x)-mx|$，円弧の長さが$2\pi\mathrm{PH}=2\pi\mathrm{PQ}\cos\theta=2\pi|f(x)-mx|\cos\theta$の扇形，厚さが$dx$の立体で近似し，その微小体積が

$$dV=\frac{1}{2}\left\{2\pi|f(x)-mx|\cos\theta\right\}|f(x)-mx|dx$$
$$=\pi\cos\theta\{f(x)-mx\}^2dx$$





4 数学B【数列の雑題】標準

▶解答◀（1）選ぶ2枚のカードに記されている数字を$a, b\ (a<b)$とする．

$a<b,\ a+b\leqq n$であるから$a<b\leqq n-a$

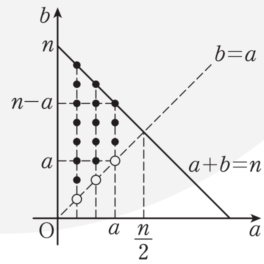
整数aを$1\leqq a<\dfrac{n}{2}$で定めたとき，整数bは$n-a-a=n-2a$通りある．

（i）$n=8$のとき$1\leqq a<4$

$\displaystyle\sum_{a=1}^{3}(8-2a)=6+4+2=\boldsymbol{12}$通りある．

（ii）$n=9$のとき$1\leqq a<4.5$

$\displaystyle\sum_{a=1}^{4}(9-2a)=7+5+3+1=\boldsymbol{16}$通りある．



（iii）nが偶数のとき$1\leqq a\leqq\dfrac{n-2}{2}$

$$\sum_{a=1}^{\frac{n-2}{2}}(n-2a)=\frac{1}{2}\left(n-2+n-2\cdot\frac{n-2}{2}\right)\cdot\frac{n-2}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}n(n-2)}\ \text{(通り)}$$

（iv）nが奇数のとき$1\leqq a\leqq\dfrac{n-1}{2}$

$$\sum_{a=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2a)=\frac{1}{2}\left(n-2+n-2\cdot\frac{n-1}{2}\right)\cdot\frac{n-1}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(n-1)^2}\ \text{(通り)}$$

（**2**） 残るカードに記されている自然数の合計が 2023 であるから

$$\frac{1}{2}n(n+1)-p-(p+1)=2023$$

$$p=\frac{1}{4}n(n+1)-1012 \quad \cdots\cdots ①$$

$0<p<n$ であるから $0<\frac{1}{4}n(n+1)-1012<n$

$0<\frac{1}{4}n(n+1)-1012$ より $n(n+1)>4048$ ……②

$\frac{1}{4}n(n+1)-1012<n$ より $n(n-3)<4048$ ……③

ここで $n^2 \fallingdotseq 4000$ とすると

$$n \fallingdotseq 20\sqrt{10}=20\cdot 3.16\cdots \fallingdotseq 63$$

$63\cdot 64=4032,\ 64\cdot 65=4160$ から，② を満たすのは $n \geqq 64$ であり，$65\cdot 62=4030,\ 66\cdot 63=4158$ から，③ を満たすのは $n \leqq 65$ である．

よって，②，③ をともに満たす n は 64，65 となり

$n=64$ のとき，① より $p=28$

$n=65$ のとき，① より $p=\frac{121}{2}$ となり不適．

以上から $\boldsymbol{p=28,\ n=64}$

要の分析

頻出タイプの問題が多く，誘導も丁寧である．計算量が多いが，いずれも結果のみを答えればよいので，手際よく解き進めたい．

（中谷，中西，河野，藤内，長島，安田亨）