

[1] 関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{9}{x} \right)$ と定め、 $y = f(x)$ のグラフを曲線 C とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減、極値、グラフの漸近線を調べ、曲線 C の概形をかけ。

(2) 曲線 C 上の点 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ および直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上の点 $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ を次のように定める。 $A_1 (1, f(1))$ とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = \frac{1}{2}x$ との交点を B_n 、点 B_n から曲線 C に接線を引いて接点を A_{n+1} とする。

(i) $A_n (a_n, f(a_n))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき、 a_{n+1} を a_n で表せ。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(ii) $b_n = (\log_2 a_{2n}) \cdot (\log_2 a_{2n+2})$ とするとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ の和を求めよ。

(このページは計算に使用する)

[2] 複素数 $z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$ について、次の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

(1) $z^{567} + \frac{1}{z^{567}}$ の値を求めよ。

(2) $(z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6)$ の値を求めよ。

(3) $z + z^2 + z^3$ の実部の値を求めよ。

(このページは計算に使用する)

〔3〕 座標平面上に曲線 $C: y = \sqrt{x^2 - 4}$ ($x \geq 2$) がある。点 $(1, 0)$ を通る C の接線を l とし、次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。また、 l と曲線 C の接点の座標を求めよ。

(2) t を 0 以上の実数とする。曲線 C と直線 $x = e^t + e^{-t}$ の共有点の y 座標を t を用いて表せ。

(3) 直線 l 、曲線 C および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(このページは計算に使用する)

〔 4 〕 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚の番号札が箱の中に入っている。この箱から番号札を 1 枚取り出し、数字を記録してからもとに戻すという試行を 3 回繰り返す。記録した数字の最大値を X 、最小値を Y とするとき、次の問いに答えよ。ただし、設問(1)は結果のみを解答せよ。

(1) $X > Y$ である確率を求めよ。

(2) $X \leq Y + 2$ である確率を求めよ。

(3) $X \geq 8$ のとき、 $Y \leq 2$ である条件付き確率を求めよ。

(このページは計算に使用する)

