２０２５年２月５日　実施

東京医科大学

医学科　一般　**数 学**

（制限時間　６０分）

解答・解説

第1問

(1)

$$(\text{与式}) = \frac{\cos 25^\circ + \cos 35^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}$$

$$= \frac{2\cos 30^\circ \cos 5^\circ}{2\cos 45^\circ \cos 5^\circ}$$

※和積の公式

$$= \frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

(2) 2曲線を連立すると

$$3x^2-4x-5=-2x^2+15x+7$$

$$5x^2-19x-12=0$$

この方程式の判別式Dは

$$D=19^2+4\times5\times12>0$$

であり、確かに2つの交点をもつ。

ここで2曲線の2交点を通る様々な図形の式は

$$(y-3x^2+4x+5)+k(y+2x^2-15x-7)=0$$

と表すことができ、$k=\frac{3}{2}$のとき

$$y-3x^2+4x+5+\frac{3}{2}(y+2x^2-15x-7)=0$$

$$2y-6x^2+8x+10+3y+6x^2-45x-21=0$$

$$\therefore\ -37x+5y-11=0$$

これは求める直線に他ならない

$$\therefore\ \underline{y=\frac{37}{5}x+\frac{11}{5}}$$

(3)

$$\int_0^4 x\sqrt{(x-1)^2}\,dx$$

$$=\int_0^4 x|x-1|\,dx$$

$f(x)=x^2-x$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$ とおく。

$$(\text{与式})=\int_0^1\{-f(x)\}dx+\int_1^4 f(x)\,dx$$

$$=\left[-F(x)\right]_0^1+\left[F(x)\right]_1^4$$

$$=F(4)-2F(1)+F(0)$$

$$=\frac{64}{3}-8-2\left(-\frac{1}{6}\right)+0=\underline{\frac{41}{3}}$$

(4) $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とおく

$$\omega^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1.$$

よって ω は $z^5=1$ の解の1つ。ただし$\omega\neq1$より

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0\quad \text{——①}$$

の解である。

同様に $z=\omega^k\ (k=1,2,3,4)$ は①の異なる解だから

$$z^4+z^3+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$$

これはzについての恒等式であり、$z=2$を代入し

$$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4)=\underline{31}$$

第2問

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

(1) それぞれの要素が部分集合に属するか、属さないかを考えて

$$2^8=\underline{256\text{個}}$$

(2) $B\subset C$ となるとき $x\in B \Rightarrow x\in C$ である。

各要素について、
・B, C 両方に属しない
・Bに属さずCに属する
・B, C 両方に属する

のいずれかであるから

$$3^8=\underline{6561\text{通り}}$$

(3) $B\cap C$ が空集合となるとき、

各要素について、
・B, C 両方に属しない
・Bに属さずCに属する
・Bに属しCに属さない

のいずれかであるから

$$3^8=\underline{6561\text{通り}}$$

第3問

(1) $\log_{10}5^{50}=50\log_{10}5$

$$=50(1-\log_{10}2)=50\cdot 0.6990=34.95$$

これより、

$$34\leqq \log_{10}5^{50}<35$$

$$10^{34}\leqq 5^{50}<10^{35}$$

となるから、$f(5^{50})=\underline{35}$ である。

(2) $n=1\sim 3$ のとき $f(n^2)=1$,

$n=4\sim 9$ のとき $f(n^2)=2$,

また、$961=31^2<10^3<32^2=1024$

であるから、$n=10\sim 31$ のとき

$f(n^2)=3$,

$n=32\sim 99$ のとき $f(n^2)=4$,

$n=100$ のとき $f(n^2)=5$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{100}f(n^2)=3\cdot 1+6\cdot 2+22\cdot 3+68\cdot 4+1\cdot 5=\underline{358}$$

(3) $f(2^n)=100$ となる条件は

$$10^{99}\leqq 2^n<10^{100}$$

$$99\leqq \log_{10}2^n<100$$

$$99\leqq n\log_{10}2<100$$

$$328.9\cdots=\frac{99}{0.3010}\leqq n<\frac{100}{0.3010}=332.2\cdots$$

これより $n=329,\ 330,\ 331,\ 332$ の

$\underline{4\text{個}}$ である。

第4問

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$\therefore\ C(2,2,2)$

直線AB上の点Sは

$$\overrightarrow{OS}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1-s\\s\\2s\end{pmatrix}$$

とおけて. $z=t$のとき $s=\frac{t}{2}$ より

$$S\left(1-\frac{t}{2},\frac{t}{2},t\right)$$

(2) (1)と同様に直線CDと平面$z=t$との共有点を求める.

直線CD上の点Tは

$$\overrightarrow{OT}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}2+u\\2-u\\2-2u\end{pmatrix}$$

とおけて. $z=t$のとき $u=\frac{2-t}{2}$ より

$$T\left(3-\frac{t}{2},1+\frac{t}{2},t\right)$$

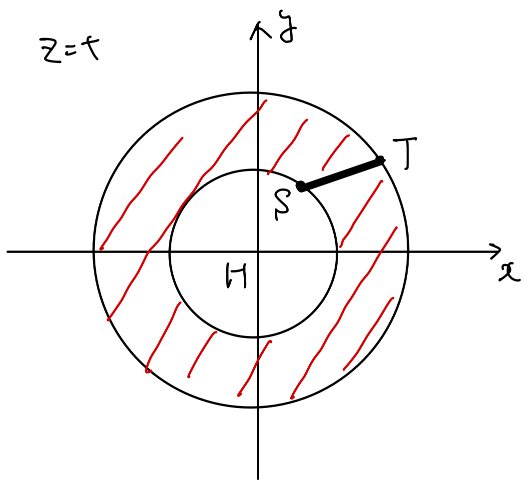
ここで $H(0,0,t)$ とおくとき

$$HS^2=\left(1-\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=1-t+\frac{t^2}{2}$$
$$HT^2=\left(3-\frac{t}{2}\right)^2+\left(1+\frac{t}{2}\right)^2=10-2t+\frac{t^2}{2}$$

であり $0\leqq t\leqq 2$のとき. $HS<HT$.

したがって線分STをHのまわりに回転して得られる図形は ⑧

$z=1$のとき $S=\pi HT^2-\pi HS^2$
$$=\pi(9-t)=8\pi$$



(3) $z=t$での切り口の面積は$\pi(9-t)$

$$V=\int_0^2\pi(9-t)dt$$
$$=\left[-\frac{\pi}{2}(9-t)^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{\pi}{2}(7^2-9^2)$$
$$=16\pi$$

(4) $z=t$における領域は.

$$1-t+\frac{t^2}{2}\leqq x^2+y^2\leqq 10-2t+\frac{t^2}{2}$$

したがって

$$a^2+b^2+c^2\leqq \underbrace{10-2c+\frac{c^2}{2}+c^2}_{f(c)}$$

$$f(c)=\frac{3}{2}c^2-2c+10$$
$$=\frac{3}{2}\left(c^2-\frac{4}{3}c\right)+10$$
$$=\frac{3}{2}\left(c-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$$

$0\leqq c\leqq 2$ より $c=2$のとき

$$\max f(c)=12$$