２０２５年２月２日　実施

東海大学

医学部　一般①　**数　学**

（制限時間　７０分）

解答速報

解答・解説

1

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(3k+3)}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{9(n+1)}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\\ \cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\\ \vdots\\ \cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\end{pmatrix}$$

(2)

$$f(x)=\left(\frac{4}{2^x}\right)^x=2^{x(2-x)}$$

$$=2^{1-(x-1)^2}$$

であるから，$x=1$ で最大値 2 をとる。

(3)

二項定理より，x^2 の係数は

${}_{26}C_2=13\cdot 25=325$ である。また

$$26^{26}=(25+1)^{26}$$

$$=25^{26}+{}_{26}C_{25}\,25^{25}+\cdots$$

$$+{}_{26}C_2\,25^2+{}_{26}C_1\,25+1$$

であるから，26^{26} を 25^2 で割った余りは $26\cdot 25+1=25^2+26$ を 25^2 で割った余りに等しく，26 である。

(4)

$1\leqq x<y+1<z+2\leqq 8$ となるから，

1～8 から 3つ選んで小さい順に

$x, y+1, z+2$ とした組と，$x\leqq y\leqq z$

を満たす組 (x, y, z) は 1対1に対応

するから，${}_8C_3=56$ 通り

(5)

$z=1+ti\ (t>0)$ とおくと，

$$z^3=(1+ti)^3$$

$$=1+3ti-3t^2-t^3i$$

$$=(1-3t^2)+(3t-t^3)i$$

となるから，$y=3t-t^3$ であり

$$y'=3-3t^2=-3(t+1)(t-1)$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$		$\searrow$

$t=1$ のとき $y=3-1=2$ であるから，y のとりうる値の範囲は

$y\leqq 2$ である。

(6)

$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\beta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

である。このとき

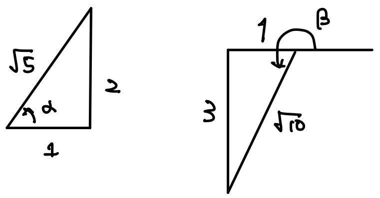
$$\cos 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

であるから、

$$\cos(2\alpha+\beta)$$

$$= -\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - \frac{4}{5}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



(7)

l と C を連立して

$$ax = 4x - x^2$$

$$x\{x-(4-a)\} = 0$$

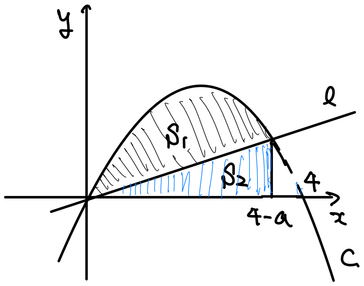
$$x = 0,\ 4-a$$

これより P の x 座標は $4-a$ である。

また、$S_1 : S_2 = 2:1$ のとき、

$$S_1 = 2S_2$$

$$\frac{1}{6}(4-a)^3 = 2\cdot\frac{1}{2}(4-a)\cdot a(4-a)$$



$4-a \neq 0$ より

$$\frac{1}{6}(4-a) = a \qquad \therefore\ a = \frac{4}{7}$$

2

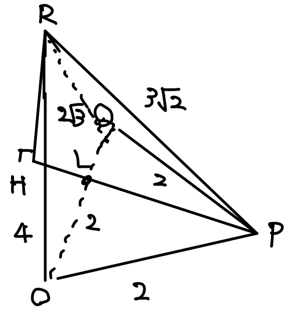
(1) $|\vec{p}|=|\vec{q}|=2$, $|\vec{r}|=4$ である.

$|\overrightarrow{PQ}|=2$ より

$$|\vec{q}-\vec{p}|^2=4$$
$$|\vec{q}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{p}|^2=4$$
$$4-2\vec{p}\cdot\vec{q}+4=4 \quad \therefore \vec{p}\cdot\vec{q}=2$$

$|\overrightarrow{QR}|=2\sqrt{3}$ より

$$|\vec{r}-\vec{q}|^2=12$$
$$|\vec{r}|^2-2\vec{q}\cdot\vec{r}+|\vec{q}|^2=12$$
$$16-2\vec{q}\cdot\vec{r}+4=12 \quad \therefore \vec{q}\cdot\vec{r}=4$$



(2) $\triangle POR$ で余弦定理より

$$\cos\angle POR=\frac{16+4-18}{2\cdot4\cdot2}=\frac{1}{8}$$

である. また,

$$\cos\angle POR=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{p}||\vec{r}|}=\frac{1}{8}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{r}=\frac{1}{8}|\vec{p}||\vec{r}|=1$$

(3) $\overrightarrow{OH}=x\vec{p}+y\vec{q}$ とおくと

$\overrightarrow{RH}=x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r}$ である.

$\overrightarrow{RH}\perp\vec{p}$ より

$$\overrightarrow{RH}\cdot\vec{p}=(x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r})\cdot\vec{p}$$
$$=4x+2y-1=0 \quad \cdots①$$

また, $\overrightarrow{RH}\cdot\vec{q}$ より

$$\overrightarrow{RH}\cdot\vec{q}=(x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r})\cdot\vec{q}$$
$$=2x+4y-4=0 \quad \cdots\cdots②$$

①, ② より $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{7}{6}$ である.

(3) $PL:LH=s:1-s$ とすると,

$$\overrightarrow{OL}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OH}$$
$$=(1-s)\vec{p}+s\left(-\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{7}{6}\vec{q}\right)$$
$$=\left(1-\frac{4}{3}s\right)\vec{p}+\frac{7}{6}s\vec{q}$$

これが OQ 上にあるから

$$1-\frac{4}{3}s=0 \quad \therefore s=\frac{3}{4}$$

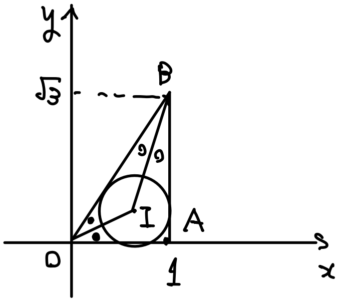
よって, $\overrightarrow{OL}=\frac{7}{8}\vec{q}$ であり,

$OL:LQ=7:1$ となる.

3

(1) $\angle AOB = 60^\circ$ であるから、$\angle AOB$ の二等分線 l の方程式は

$$y = (\tan 30^\circ)\,x \quad \therefore\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$



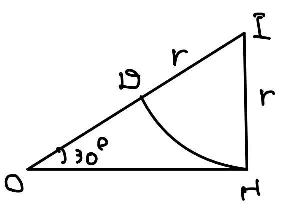
(2) 内接円の半径を r とすると、$\triangle OAB$ の面積を2通りで表して

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+2)\,r$$

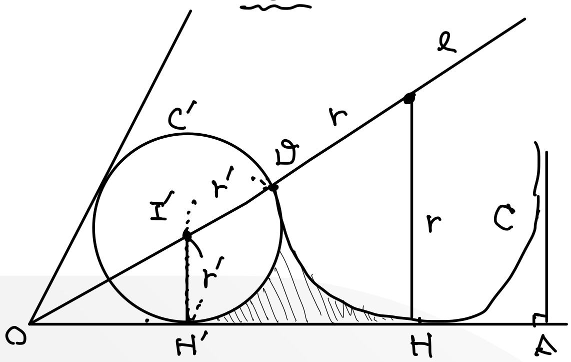
$$r = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

また、中心の x 座標は $1-r = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ である。

(3) 中心を I、C と OA の接点を H とすると、$\angle IOH = 30^\circ$ であり、$ID = IH = r$ である。$\triangle IOH$ は30度定規であるから $OI = 2r$ となり、D は OI の中点となる。よって D の x 座標は $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ である。



(4) C' の半径を r'、中心を I' とする。C' と OA の接点を H' とすると、(3) と同様に考えて、$OI' = 2r'$ である。これより I' は OD を $2:1$ に内分するから、I' の x 座標は $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ であり、$OD = r = 3r'$ より $r' = \dfrac{r}{3} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{6}$ である。



(5) $r = 3r'$ であることに注意すると、OA と C, C' で囲まれた面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}(r'+3r')\frac{\sqrt{3}}{2}(r'+3r') - \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}(3r')^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi r'^2$$

$$= \left(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi\right)r'^2$$

C' で囲まれた面積 S_2 は $S_2 = r'^2\pi$ であるから、

$$\frac{S_1}{S_2} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{11}{6}$$