2025年1月25日　実施

東北医科薬科大学

医学部　一般　**数学**

解答・解説

1.

(1) $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-16b}}{2}$

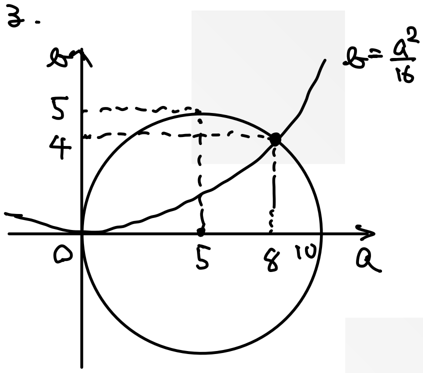
である．α が実数でないとき，

$|\alpha|^2 = \frac{1}{4}\left|-a \pm \sqrt{16b-a^2}\, i\right|^2$

$= \frac{1}{4}\{a^2 + (16b-a^2)\} = 4b$

となる．ここで，$a^2-10a+b^2=0$ は ab 平面で $(5,0)$ 中心，半径 5 の円を表すから，b の最大値は 5 であり，そのとき $|\alpha|$ の最大値は

$\sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5}$ である．また，$a=5$, $b=5$ であり，これは $a^2-16b<0$ を満たしている．



(2) $\alpha=\beta$ のとき $16b-a^2=0$ で，$b=\frac{a^2}{16}$ と $a^2-10a+b^2=0$ の交点は $(8,4)$ であるから，このとき

$a=8$, $b=4$ で，$\alpha=\beta=-4$

となる．

(3) (i) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=4b$

であるから，

$\alpha^2+\beta^2+10\alpha+10\beta$

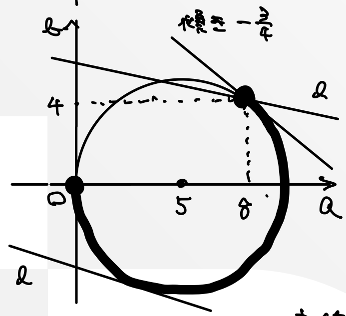
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+10(\alpha+\beta)$

$=a^2-8b-10a$

$=-b^2-8b = 16-(b+4)^2$

α, β が実数のとき，a, b は図の太線部を動き，b のとりうる値の範囲は $-5 \leqq b \leqq 4$ であるから，最大値は 16

(ii) $\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\beta-\alpha-\beta=\sqrt{3}b+a$



$\sqrt{3}b+a=k$ とおいて，直線 l: $\sqrt{3}b+a=k$ と，円 $(a-5)^2+b^2=25$ の太線部が共有点をもつ条件を考える．$(8,4)$ における接線の傾きは $-\frac{3}{4}$ であることと，l の b 切片が $\frac{k}{\sqrt{3}}$ に注意すると，k の最大値は $(8,4)$ 通るときで，$8+4\sqrt{3}$，最小値は接するときで，

$\frac{|5-k|}{\sqrt{3+1}}=5 \quad \therefore k=-5, 15$

となるから，最小値は -5 である．

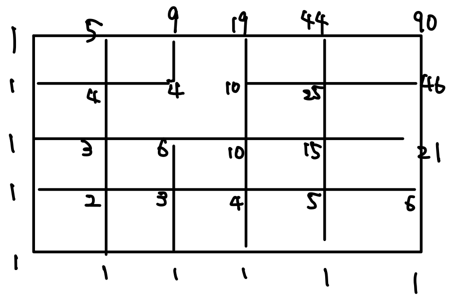
2.

(1) A→B は →5つ ↑4つ の順列を考えて ${}_9C_4$ = 126通り ある。

(2) A→Q は →2つ ↑2つ の順列より ${}_4C_2$ 通り，Q→B は →3つ ↑2つ の順列より ${}_5C_2$ 通りあるから，A→Q→B は

${}_4C_2 \cdot {}_5C_2 = 6 \cdot 10 = 60$ 通り ある。

(3) 図より，90通り ある



(4) (i) P, Q, R の 1つ左の区画の点を P′, Q′, R′ とする。このとき

A→P→P′→B は ${}_3C_1 \cdot {}_7C_3 = 105$ 通り

A→Q→Q′→B は ${}_4C_2 \cdot {}_6C_2 = 90$ 通り

A→R→R′→B は ${}_5C_2 \cdot {}_5C_1 = 50$ 通り

あるから，P, Q, R で西に戻るとき，

$105 + 90 + 50 = 245$ 通り

(ii) →6つ，←1つ，↑4つ の順列を考えるが，区画をはみ出さないことから，"← 1つが どの → よりも 左 or 右にある" という状況は除く。また，B についてからは移動しないから，最後が ← → のものも除く。前者について，○7つ と ↑4つ を並べ，○7つのうち最も左または右のものに → を入れると考えると，

$2 \cdot {}_{11}C_4 = 660$ 通りある。後者については，前9個については (1)の 126通り あるから

求める経路は

$$\frac{11!}{6!4!} - 660 - 126 = 1524 \text{ 通り}$$

$\boxed{別}$ (3) (2)までと同様に考えると

QR を通るものは，${}_4C_2 \cdot {}_4C_1 = 24$ 通り

RS を通るものは，${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 = 30$ 通り

ともに通るものは ${}_4C_2 \cdot {}_3C_1 = 18$ 通り

これより，QR または RS を通るものは

$24 + 30 - 18 = 36$ 通り あるから，どちらも通らないものは $126 - 36 = 90$ 通り

3.

(1) $f'(x) = (1+\sqrt{3})\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + (3-\sqrt{3})\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\qquad - 8\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}$

であるから,

$f'(0) = 3-\sqrt{3} - 8\cdot 0 = 3-\sqrt{3}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2(1+\sqrt{3}) + 2(3-\sqrt{3}) - 8 = 0$

(2) $t = \tan x$, $c = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ とおくと,

$c = 1+t^2$ であり,

$f'(x) = (1+\sqrt{3})ct + (3-\sqrt{3})c - 8t$

$= (1+\sqrt{3})(1+t^2)t + (3-\sqrt{3})(1+t^2)$

$\quad - 8t$

$= (1+\sqrt{3})\{t^3 + (2\sqrt{3}-3)t^2$

$\quad + (5-4\sqrt{3})t + (2\sqrt{3}-3)\}$

$= (1+\sqrt{3})(t-1)$

$\quad \times \{t^2 + 2(\sqrt{3}-1)t - (2\sqrt{3}-3)\}$

$= (1+\sqrt{3})(t-1)(t+\sqrt{3})$

$\quad \times (t-(2-\sqrt{3}))$

ここで, $\tan x = 2-\sqrt{3}$ を満たす x は $x = \dfrac{\pi}{12}$ であるから, 増減表は次のようになる.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

また, $g(x) = \displaystyle\int \tan x\, dx$

$= \displaystyle\int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + C$

であり, $g(0) = 0$ より,

$g(x) = -\log|\cos x|$ と分かる.

極小値は $x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}$ でとり,

$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}(3-\sqrt{3})$

$\qquad + 8\log\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{9-3\sqrt{3}}{2} - 8\log 2$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + 3-\sqrt{3} + 8\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{7-\sqrt{3}}{2} - 4\log 2$

(3) 極大値は $x = \dfrac{\pi}{12}$ でとり,

$\cos x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ も合わせると,

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$\qquad + 8\log\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$= \dfrac{13-7\sqrt{3}}{2} + 8\log\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

注 $\tan\dfrac{\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}$

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$