2025年度 私大医学部入試

2025年3月1日 実施

埼玉医科大学

医学部 後期 数学

（制限時間 50分）

解答速報

医学部専門予備校 D組

解答・解説

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=a(x-a)^2-a$

$g(x)=-a(x+a)^2+a.$

$f(x)=g(x)$ より

$a(x-a)^2-a=-a(x+a)^2+a$

$(x-a)^2-1=-(x+a)^2+1$

$x^2-2ax+a^2-1=-x^2-2ax-a^2+1$

$2x^2=2(1-a^2)$

$x=\pm\sqrt{1-a^2}$

$f(\pm\sqrt{1-a^2})=(1-a^2\mp2a\sqrt{1-a^2}+a^2-1)a$

$=\mp2a^2\sqrt{1-a^2}$

よって $(x,y)=(\pm\sqrt{1-a^2},\mp2a^2\sqrt{1-a^2})$

$=\pm\sqrt{1-a^2}(1,-2a^2)$

(2) $-\sqrt{1-a^2}\leqq x\leqq\sqrt{1-a^2}$ のとき

$g(x)\geqq f(x)$ であり

$-\sqrt{1-a^2}=\alpha$, $\sqrt{1-a^2}=\beta$ とおくと

$S=-2a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=-2a\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{3}a\left(2\sqrt{1-a^2}\right)^3$

$=\frac{8}{3}a\sqrt{(1-a^2)^3}$

$=\frac{8}{3}\sqrt{a^2(1-a^2)^3}$

ここで 相加平均と相乗平均の大小関係より

$\frac{3a^2+(1-a^2)+(1-a^2)+(1-a^2)}{4}\geqq\sqrt[4]{3a^2(1-a^2)^3}$

$\frac{3}{4}\geqq\sqrt[4]{3a^2(1-a^2)^3}$

両辺2乗して

$\frac{9}{16}\geqq\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2(1-a^2)^3}$

$\frac{8}{3}\sqrt{a^2(1-a^2)^3}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

等号成立は $3a^2=1-a^2$ より $a^2=\frac{1}{4}$.

よって $a=\frac{1}{2}$ のとき $\max S=\frac{\sqrt{3}}{2}$

《もちろん微分でも》

$a^2=t$ とおく. $f(t)=t(1-t)^3$

$f'(t)=(1-t)^3-3t(1-t)^2$

$=(1-4t)(1-t)^2$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

$t=\frac{1}{4}$ のとき $\max f(t)=\frac{27}{4^4}$.

よって $a=\frac{1}{2}$ のとき

$\max S=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{27}{4^4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$

(1) $|z|=1$ のとき $0\leqq\theta<2\pi$ である θ を用いて

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

と表すことができ、$\theta=2\varphi$ とおくと $0\leqq\varphi<\pi$ で

$$z=\cos2\varphi+i\sin2\varphi$$

である。

したがって

$$A=\{\phi\mid 0<\phi<\pi\}$$
$$B=\{\phi\mid 0\leqq\phi<\pi\}$$

とおくと $A\subset B$ であるから

③ 十分条件だが必要条件ではない

(2) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-i|=|z+i|$

~~これは複素数平面上で2点 $i,-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。すなわち、実軸全体を表す。~~

一方、$|z|=1$ は 0 を中心とし半径 1 の円を表すから

④ 必要条件でも十分条件でもない

(3) $\left|\dfrac{\sqrt{2}z-1}{z-\sqrt{2}}\right|=1 \Leftrightarrow |\sqrt{2}z-1|=|z-\sqrt{2}|$

両辺2乗すると

$$(\sqrt{2}z-1)(\sqrt{2}\bar{z}-1)=(z-\sqrt{2})(\bar{z}-\sqrt{2})$$

$$2z\bar{z}-\sqrt{2}z-\sqrt{2}\bar{z}+1=z\bar{z}-\sqrt{2}\bar{z}-\sqrt{2}z+2$$

$$\therefore z\bar{z}=1$$

$$\therefore |z|=1$$

したがって ① 必要十分条件

$\boxed{3}$ $\vec{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ である。

したがって $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を基底として $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおけば、直交座標として表えることができる。

$$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$$

より、点 P は O を中心とし $\vec{a},\vec{b}$ を基底とする座標平面上で円を描く。

問1. $|\overrightarrow{OP}|^2=\underline{1}$

問2. $\overrightarrow{OP}=(\cos\theta)\cdot\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$ より

P(x,y,z) とおくと

$$z=(\cos\theta)\times\frac{1}{\sqrt{3}}+(\sin\theta)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$z=0$ より
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=0$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

問3 $PP'=|z|$ である。

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$
$$=\sqrt{\frac{5}{6}}\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$$

ここで $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ とおけば

$$z=\frac{\sqrt{30}}{6}\cos(\theta+\alpha).$$

したがって $\theta+\alpha=0$ or π のとき $|z|$ は max.

$$\theta=-\alpha \text{ or } \pi-\alpha.$$

$$\tan\theta=\tan(-\alpha) \text{ or } \tan(\pi-\alpha)$$

いずれも $\tan\theta=-\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

このとき $PP' = |z| = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

$\cos(-\alpha) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. $\cos(\pi-\alpha) = -\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

$\sin(-\alpha) = -\dfrac{\sqrt{15}}{5}$, $\sin(\pi-\alpha) = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \pm\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\vec{a} - \frac{\sqrt{15}}{5}\vec{b}\right)\\ &= \pm\left(\frac{\sqrt{30}}{15}\vec{a} - \frac{\sqrt{30}}{10}\vec{b}\right)\\ &= \pm\frac{\sqrt{30}}{30}(2\vec{a} - 3\vec{b})\\ &= \pm\frac{\sqrt{30}}{30}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-0 \\ 2+3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{OP'} = \pm\dfrac{\sqrt{30}}{30}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mp\dfrac{\sqrt{30}}{30}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

問4.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP'}|^2 &= X^2 + Y^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - Z^2\\ &= |\overrightarrow{OP}|^2 - Z^2 = 1 - Z^2.\end{aligned}$$

よって $|z|$ が max のとき $|\overrightarrow{OP'}|$ は min

問3より

$$\min : \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$\boxed{4}$ 全部で20人.

問1. 10歳がえらばれないのは

$$\frac{{}_{18}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{68}{95}$$

よって少なくとも1人えらばれるのは

$$1 - \frac{68}{95} = \frac{27}{95}$$

問2 事象A：10歳がえらばれない

事象B：同じ年齢がいない

求めるのは

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}\cap B)$$

問1より $P(\bar{A}) = \dfrac{27}{95}$

事象B：各年齢から1人ずつえらぶ

$8\cdot9\cdot10 \to 6\times9\times2$
$8\cdot9\cdot11 \to 6\times9\times1$
$8\cdot9\cdot12 \to 6\times9\times2$
$8\cdot10\cdot11 \to 6\times2\times1$
$8\cdot10\cdot12 \to 6\times2\times2$
$8\cdot11\cdot12 \to 6\times1\times2$
$9\cdot10\cdot11 \to 9\times2\times1$
$9\cdot10\cdot12 \to 9\times2\times2$
$9\cdot11\cdot12 \to 9\times1\times2$
$10\cdot11\cdot12 \to 2\times1\times2$

このうち10歳を含むものは $\bar{A}\cap B$.

202通り

よって

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cap\bar{B}) &= \frac{27}{95} - \frac{202}{{}_{20}C_3}\\ &= \frac{27}{95} - \frac{101}{570}\\ &= \frac{61}{570}\end{aligned}$$