2025年度　私大医学部入試

2025年2月10日　実施

大阪医科薬科大学

医学部　一般　数　学

（制限時間　90分）

解答速報

医学部専門予備校 D組

解答・解説

[1]

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$

$=\int_0^1 x\cos\frac{\pi}{2}x^2dx$

$\frac{\pi}{2}x^2=t$ とおくと、

$\pi x\,dx=dt\quad\therefore x\,dx=\frac{1}{\pi}dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\cos t\,dt=\frac{1}{\pi}$

(2) $a_n=\sum_{k=1}^{n}2k\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)\cdot n^2$

より $\frac{a_n}{n^p}=\frac{1}{n^{p-2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)$

ここで、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$=\int_0^1 2x\sin(2\pi x)dx$

$=\left[-\frac{1}{\pi}x\cos2\pi x+\frac{1}{2\pi^2}\sin2\pi x\right]_0^1$

$=-\frac{1}{\pi}$

よって、

$\begin{cases}p=2\text{ のとき}\quad -\frac{1}{\pi}\\ p>2\text{ のとき}\quad 0\end{cases}$

[2]

(1) $\overrightarrow{OC}$ は $\overrightarrow{OA}$ の直線 l への正射影ベクトルなので

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|^2}\vec{m}$$
$$=\frac{130}{65}\vec{m}$$
$$=2\vec{m}=(-12,4,10)$$

よって C の座標は $(-12,4,10)$

また、$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OB}$ の直線 l への正射影ベクトルなので

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|^2}\vec{m}$$
$$=\frac{-65}{65}\vec{m}$$
$$=-\vec{m}=(6,-2,-5)$$

よって D の座標は $(6,-2,-5)$

したがって

$\overrightarrow{AC}=(-2,4,-4)$ より $|\overrightarrow{AC}|=6$

$\overrightarrow{BD}=(-2,-1,-2)$ より $|\overrightarrow{BD}|=3$

(2) $\overrightarrow{AC}\perp\vec{m}$ かつ $\overrightarrow{BD}\perp\vec{m}$ より

4点 A, B, C, D が同一平面上にあるとすると、$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{BD}$ となる。

このとき、実数 k を用いて $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BD}$ と表せる。

つまり $(-2,4,-4)=(-2k,-k,-2k)$ と表せることとなるが、これをみたす k は存在しない。

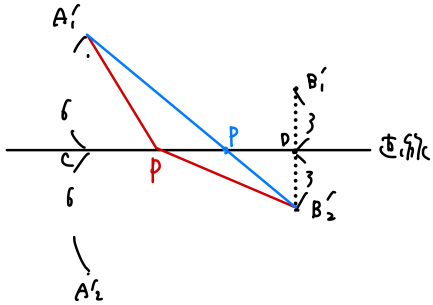
よって 4点 A, B, C, D は同一平面上にない ■

(3) l を軸とし、2点 A, B を回転した円をそれぞれ C_A, C_B と名付け、円 C_A 上の点を A'、円 C_B 上の点を B' とすると、

$AP=A'P$ かつ $BP=B'P$ が成り立つ。…①

ここで直線 l を含む平面で切ったとき下図のようになる

ただし、2点 A'_1, A'_2 は円 C_A 上の点で 2点 B'_1, B'_2 は円 C_B 上の点である。



よって①と上図を合わせて、

$AP+BP=A'_1P+B'_2P\geqq A'_1B'_2$ となり

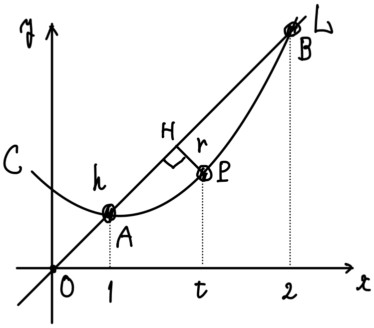
等号成立は3点 A'_1, P, B'_2 がこの順に一直線上に並ぶときであり、

このとき、$\triangle A'_1CP\sim\triangle B'_2DP$ で相似比は $2:1$ なので、点 P の座標は $(0,0,0)$。

このとき、

$$A'_1B'_2=3BP$$
$$=3OB$$
$$=3\sqrt{74}$$

[3] $C: y=x^2-x+2$, $L: y=2x$



(1) CとLを連立して

$$x^2-x+2=2x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1,2$$

C, Lの交点を$A(1,2)$, $B(2,4)$とする

PHは、点$P(t, t^2-t+2)$と直線$2x-y=0$との距離であるから

$$PH=r=\frac{|2t-(t^2-t+2)|}{\sqrt{5}}=\frac{|t^2-3t+2|}{\sqrt{5}}$$

となり、$1\leqq t\leqq 2$より

$t^2-3t+2\leqq 0$ であるから

$$r=\frac{1}{\sqrt{5}}(-t^2+3t-2)$$

直線PHは、Pを通りLに垂直な直線なので

$$PH: y=-\frac{1}{2}(x-t)+t^2-t+2$$

$$\therefore x+2y-2t^2+t-4=0$$

OHは、原点と直線PHの距離であるから

$$OH=h=\frac{|2t^2-t+4|}{\sqrt{5}}$$

ここで、$1\leqq t\leqq 2$より $2t^2-t+4\geqq 0$

であるから

$$h=\frac{1}{\sqrt{5}}(2t^2-t+4)$$

(2) $OA=\sqrt{5}$, $OB=2\sqrt{5}$ より求める体積Vは、

$$V=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}\pi PH^2\,dh$$

と表せる。(1)から

$$PH^2=\left(\frac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}(t-1)^2(t-2)^2$$

であり、

$$dh=\frac{1}{\sqrt{5}}(4t-1)\,dt$$

h	$\sqrt{5}\to 2\sqrt{5}$
t	$1\to 2$

と対応するので、

$$V=\int_1^2\frac{\pi}{5}(t-1)^2(t-2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(4t-1)\,dt$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_1^2(t-1)^2(t-2)^2\{4(t-1)+3\}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left\{4\int_1^2(t-1)^3(t-2)^2dt+3\int_1^2(t-1)^2(t-2)^2dt\right\}$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left\{4\cdot\frac{3!2!}{6!}(2-1)^6+3\cdot\frac{2!2!}{5!}(2-1)^5\right\}$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)=\frac{\pi}{30\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{150}\pi$$

[4]

(1) ${}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1}$

$$= {}_{2n}C_n - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= {}_{2n}C_n - \frac{n}{n+1}\times{}_{2n}C_n$$

$$= \left(1-\frac{n}{n+1}\right){}_{2n}C_n$$

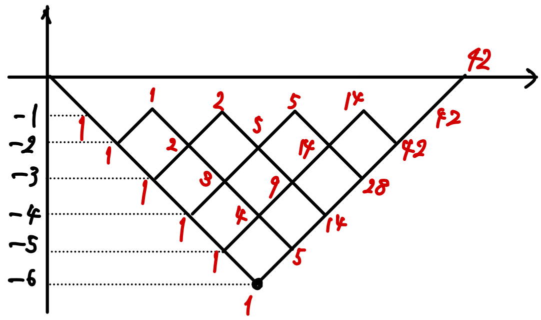
$$= \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

(2)

(i) $S_{12}=0$ となるのは，表，裏がともに６回のとき

$${}_{12}C_6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{231}{1024}$$

(ii) 縦軸に合計得点，横軸にサイコロを投げた回数をとり，$S_{12}=0$ かつ $S_k<0$ $(k=1,2,\cdots,11)$ となるコインの投げ方を次のように経路に対応させて考える。



各点までの行き方を記入して，42通りあるとわかる

したがって，求める確率は

$$\frac{42}{{}_{12}C_6}=\frac{42}{924}=\frac{1}{22}$$