2025年度　私大医学部入試

2025年2月28日　実施

日本医科大学

医学部　後期　数学

（制限時間　90分）

解答速報

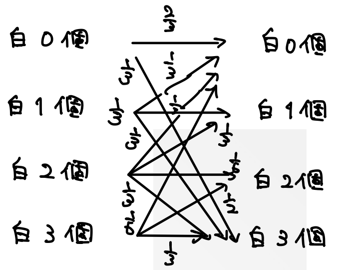
医学部専門予備校 D組

解答・解説

[1] さいころを n 回振って，箱1〜3がすべて白である確率を a_n とする．箱1のみが黒，箱2のみが黒，箱3のみが黒である確率はすべて等しく，これを b_n とする．
箱1のみが白，箱2のみが白，箱3のみが白である確率はすべて等しく，これを c_n とする．箱1〜3がすべて黒である確率を d_n とする．

$$a_n + 3b_n + 3c_n + d_n = 1 \quad \cdots ①$$

である．



図より，

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}\cdot 3b_n + \frac{1}{3}\cdot 3c_n + \frac{1}{3}\cdot d_n$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + c_n + \frac{1}{3}d_n \quad \cdots ②$$

$$3b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}\cdot 3b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \quad \cdots ③$$

$$3c_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot 3b_n + \frac{1}{3}\cdot 3c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \quad \cdots ④$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}\cdot 3b_n + \frac{1}{3}\cdot 3c_n + \frac{2}{3}d_n$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + \frac{2}{3}d_n \quad \cdots ⑤$$

(1) ①を②へ代入すると $a_{n+1} = \frac{1}{3}$ である．
よって $a_1 = \frac{1}{3}$，$a_2 = \frac{1}{3}$，$a_3 = \frac{1}{3}$ となる．

(2) (3) $a_0 = 1$，$b_0 = c_0 = d_0 = 0$ より

$$b_1 = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6},\quad b_2 = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$

$$b_3 = \frac{1}{18} + \frac{1}{72} = \frac{5}{72}$$ である．また，

$$c_1 = 0,\quad c_2 = \frac{1}{18} + 0 = \frac{1}{18}$$

$$c_3 = \frac{1}{36} + \frac{1}{54} = \frac{5}{108}$$ である．

(4) ①を⑤へ代入して

$$d_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n$$

であるから，

$$d_1 = \frac{1}{6},\quad d_2 = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$d_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{8} = \frac{23}{72}$$

箱1が黒である確率は

$$b_3 + 2c_3 + d_3 = \frac{5}{72} + \frac{5}{54} + \frac{23}{72} = \frac{104}{216}$$

であり，さらに箱3が白である確率は，$b_3 + c_3 = \frac{5}{72} + \frac{5}{108} = \frac{25}{216}$

であるから，求める条件付き確率は

$\frac{25}{104}$ である

[2]

(1) $x^2+\dfrac{(y-b)^2}{a^2}=1$ を y について解く.

$$(y-b)^2=a^2(1-x^2)$$

$$y=b\pm a\sqrt{1-x^2}$$

となる. $y_+=b+a\sqrt{1-x^2}$, $y_-=b-a\sqrt{1-x^2}$ とおくと,

$$\frac{V(a,b)}{\pi}=\int_{-1}^{1}{y_+}^2dx-\int_{-1}^{1}{y_-}^2dx$$

$$=\int_{-1}^{1}4ab\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=4ab\cdot1^2\pi\cdot\frac{1}{2}=2ab\pi$$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ は図2の半円の面積を利用した. よって $V(a,b)=\underline{2ab\pi^2}$ である.

図1

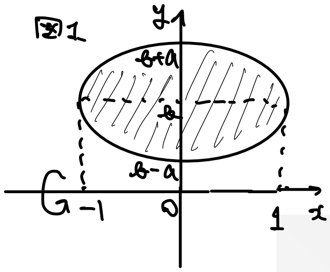
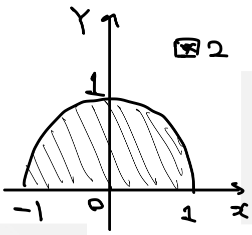


図2



(2) $$\frac{W_{n,j}(a)}{\pi^2}=2a^{n-1}\left(1+\frac{2j-1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=2\left\{a^{n-1}+(2j-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

であるから,

$$\frac{X_n(a)}{2\pi^2}=\sum_{j=1}^{2^{n-1}}\left\{a^{n-1}+\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}(2j-1)\right\}$$

$$=(2a)^{n-1}+\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\cdot(1+2^n-1)\cdot2^{n-1}$$

$$=(2a)^{n-1}+(2a)^{n-1}=2^na^{n-1}$$

よって $X_n(a)=\underline{2^{n+1}a^{n-1}\pi^2}$ である.

(3) $$\sum_{n=1}^{N}nX_n(a)=4\pi^2\sum_{n=1}^{N}n(2a)^{n-1}$$

である. $r=2a$ とおく.

$f_{n+1}-f_n=nr^{n-1}$ となるような f_n を探す.

$f_n=(pn+q)r^{n-1}$ としてみると,

$$f_{n+1}-f_n=\{p(n+1)+q\}r^n-(pn+q)r^{n-1}$$

$$=\{(r-1)pn+rp+(r-1)q\}r^{n-1}$$

これが nr^{n-1} と一致するとき

$$(r-1)p=1,\quad rp+(r-1)q=0$$

$$p=\frac{1}{r-1},\quad q=-\frac{r}{(r-1)^2}$$

となるから, $f_n=\left\{\dfrac{1}{r-1}n-\dfrac{r}{(r-1)^2}\right\}r^{n-1}$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{N}nX_n(a)=4\pi^2\sum_{n=1}^{N}(f_{n+1}-f_n)$$

$$=4\pi^2(f_{N+1}-f_1)$$

$$=4\pi^2\left\{\frac{1}{r-1}(N+1)r^N-\frac{r}{(r-1)^2}r^N-\left(\frac{1}{r-1}-\frac{r}{(r-1)^2}\right)\right\}$$

$N\to\infty$ としてこれが収束する条件は Nr^N と r^N がともに収束することで, その必要十分条件は

$$-1<r<1\qquad\therefore\ -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$$

$a>0$ も合わせると $\underline{0<a<\dfrac{1}{2}}$ である.

このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty}nX_n(a)=4\pi^2\left\{\frac{r}{(r-1)^2}-\frac{1}{r-1}\right\}$$

$$=\frac{4\pi^2}{(r-1)^2}=\underline{\frac{4\pi^2}{(2a-1)^2}}$$

[3]

(1) Pにおける法ベクトルの1つは

$(\sqrt{2}\sin\theta, -\cos\theta)$ であるから、L_θ 上の点

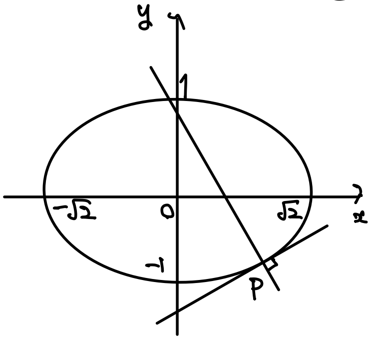
(x, y) に対して

$$(-\sqrt{2}\sin\theta, -\cos\theta)\cdot(x-\sqrt{2}\cos\theta, y+\sin\theta)=0$$

$$\sqrt{2}\sin\theta(x-\sqrt{2}\cos\theta)+\cos\theta(y+\sin\theta)=0$$

$$(\sqrt{2}\sin\theta)x-\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta)y=0$$

$$y=-\sqrt{2}\tan\theta\cdot x+\sin\theta$$



(2) $f(\theta)=-k\tan\theta+\sin\theta$ に対して

$$f'(\theta)=-\frac{k}{\cos^2\theta}+\cos\theta$$

$f'(\theta)=0$ の解が α より

$$-\frac{k}{\cos^2\alpha}+\cos\alpha=0 \qquad \therefore \cos\alpha=k^{\frac{1}{3}}$$

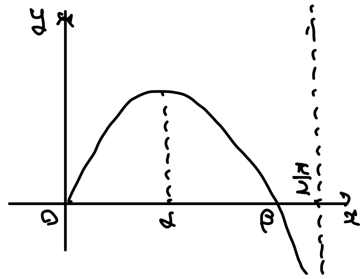
であるから、

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=-k\tan\alpha+\sin\alpha\\ &=\sin\alpha\left(1-\frac{k}{\cos\alpha}\right)\\ &=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\left(1-\frac{k}{\cos\alpha}\right)\\ &=\sqrt{1-k^{\frac{2}{3}}}\,(1-k^{\frac{2}{3}})=(1-k^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=0,\quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}f(\theta)=-\infty$$

これより、概形は次のようになる。



(3) $x\neq 0$ を固定して θ を動かす。

$$y=-\sqrt{2}x\tan\theta+\sin\theta$$

であり、(2)で $k=\sqrt{2}x$ とすると、

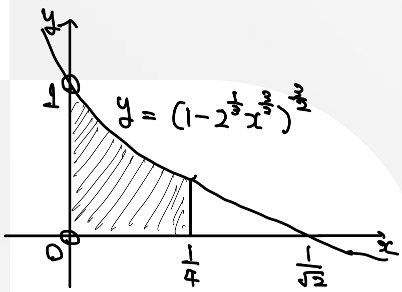
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で θ を動かしたときの y の

値域は $y\leqq(1-2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

である。$x=0$ のとき $y=\sin\theta$ より

値域は $0<y<1$ である。

よって D は次図の境界を含む網目部分である。



(4) $S=\int_0^{\frac{1}{4}}(1-2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$

ここで、$(\sqrt{2}x)^{\frac{1}{3}}=\sin\theta$ とおくと、

$\sqrt{2}x = \sin^3\theta$ より $dx = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$

であり,

x	$0 \to \frac{1}{4}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{16}(1-\cos 4\theta) + \frac{1}{8}\sin^2 2\theta\cos 2\theta\right\} d\theta$$

$$= \frac{3}{16\sqrt{2}}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{1}{3}\sin^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{3}{16\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3\pi+4}{64\sqrt{2}}$$

[4]

(1) $w_n = \dfrac{1}{3}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)$

$$= \frac{1}{3}z^{4n}\left(1 + |z+1|^2 z + z^2\right)$$

z は大きさが1で虚部が正であり

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad (0<\theta<\pi)$$

とおくと,

$$1 + |z+1|^2 z + z^2$$

$$= 1 + \{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\}(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$= 1 + (2+2\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$= \{1 + 2(1+\cos\theta)\cos\theta + \cos 2\theta\} + i\{2(1+\cos\theta)\sin\theta + \sin 2\theta\}$$

$$= 2(2\cos\theta+1)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 2(2\cos\theta+1)z$$

であるから,

$$w_n = \frac{1}{3}z^{4n} \cdot 2(2\cos\theta+1)z$$

$$= \frac{2}{3}(2\cos\theta+1)z^{4n+1}$$

$$= \frac{2}{3}(2\cos\theta+1) \times \{\cos(4n+1)\theta + i\sin(4n+1)\theta\}$$

この実部が0となる条件は

$$(2\cos\theta+1)\cos(4n+1)\theta = 0$$

m を整数として

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \quad \text{または} \quad (4n+1)\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \cdots ①$$

また，虚部が $\frac{2}{3}$ より大きく条件は

$$(2\cos\theta+1)\sin(4n+1)\theta > 1 \cdots ②$$

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき，②の左辺は0となり成立しない．①より $\sin(4n+1)\theta=\pm1$ だが $\sin(4n+1)\theta=-1$ のときは②は成立せず，$\sin(4n+1)\theta=1$ かつ $\cos\theta>0$ のとき②は成立するから，

$$(4n+1)\theta=\frac{\pi}{2}+2m\pi$$

$$\theta=\frac{4m+1}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$\cos\theta>0$ より $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ となる m の値は $m=0,1,2,\cdots,n-1$ である．

よって $N_n=n$ であり，$k=m+1$ であるから．

$$\theta_{n,k}=\frac{4(k-1)+1}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(2) $(z_{n,k})^{4n+1}=\cos\frac{4k-3}{2}\pi+i\sin\frac{4k-3}{2}\pi$

$$=\cos\left(-\frac{3}{2}\right)\pi+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=i$$

(3) $\frac{k-1}{N_n}\leqq\frac{4k-3}{4n+1}\leqq\frac{k}{N_n}$

を示す．$N_n=n$ であり，$k=1,2,\cdots,n$ に対し

$$\frac{4k-3}{4n+1}-\frac{k-1}{n}=\frac{(4k-3)n-(k-1)(4n+1)}{(4n+1)n}$$

$$=\frac{n+1-k}{n(4n+1)}>0$$

$$\frac{k}{n}-\frac{4k-3}{4n+1}=\frac{k(4n+1)-(4k-3)n}{n(4n+1)}$$

$$=\frac{3n+k}{n(4n+1)}>0$$

であるから，示された

(4) $\frac{w_{n,k}}{i}=\frac{2}{3i}(2\cos\theta_{n,k}+1)(z_{n,k})^{4n+1}$

$$=\frac{2}{3}(2\cos\theta_{n,k}+1)$$

である．ここで，

$$\frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n}\frac{w_{n,k}}{i}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{3}\cos\theta_{n,k}+\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_{n,k}+\frac{2}{3}$$

となるが，(3)より

$$\cos\frac{k\pi}{2n}\leqq\cos\theta_{n,k}\leqq\cos\frac{k-1}{2n}\pi$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_{n,k}\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k-1}{2n}\pi$$

$n\to\infty$ とすると，最左辺と最右辺はともに

$$\int_0^1\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

に収束するから，ハサミうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_{n,k}=0$$

となる．よって①も合わせると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n}\frac{w_{n,k}}{i}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3\pi}+\frac{2}{3}$$