２０２５年２月１日　実施

日本医科大学

医学部　一般前期　数 学

（制限時間　９０分）

解答速報

解答・解説

[Ⅰ]

$\alpha = \sqrt{2}i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\beta = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ とおく

問1

$P_{n,k} = {}_nC_k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \underline{{}_nC_k \cdot \frac{2^k}{3^n}}$

$|z_{n,k}| = |z_0 \times \alpha^k \cdot \beta^{n-k}| = \frac{(\sqrt{2})^k}{(\sqrt{2})^{n-k}} = \underline{2^{\frac{2k-n}{2}}}$

$\arg(z_{n,k}) = \frac{\pi}{2} \times k + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot(n-k) = \underline{\frac{3k-n}{4}\pi}$

問2

$P_{2025,k} = {}_{2025}C_k \cdot \frac{2^k}{3^n}$

$\frac{P_{2025,k+1}}{P_{2025,k}} = \frac{{}_{2025}C_{k+1} \cdot 2^{k+1}}{{}_{2025}C_k \cdot 2^k} = \frac{\frac{2025!}{(2024-k)!(k+1)!} \cdot 2^{k+1}}{\frac{2025!}{(2025-k)!\,k!} \cdot 2^k}$

$= \frac{2(2025-k)}{k+1}$

$\frac{P_{2025,k+1}}{P_{2025,k}} > 1 \iff 4050 - 2k > k+1$

$\therefore k < \frac{4049}{3}$ $\quad\therefore k \leqq 1349$

$k \geqq 1350$ のときは $P_{2025,k} > P_{2025,k+1}$ より

$\underline{k = 1350}$ のとき max をとる.

問3 純虚数のとき

$\arg(z_{2025,k}) = \frac{\pi}{2} + m\pi$ （m：整数）

$\frac{3k-2025}{4}\pi = \frac{\pi}{2} + m\pi$

$3k - 2025 = 2 + 4m$

$3k - 4m = 2027.$

$3(k-1) - 4(m-506) = 0$

$3(k-1) = 4(m-506)$

3と4は互いに素より. 両辺は12の倍数で

$3(k-1) = 4(m-506) = 12\ell$ （ℓ：整数）

$k = 4\ell + 1$

$0 \leqq k \leqq 2025$ より $\quad 0 \leqq \ell \leqq 506$

$\therefore$ $\underline{507\text{コ}}$

[Ⅱ]

$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として

問1

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$ より $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}.$

$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2$ より $\quad \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{3+1-2^2}{2} = 0.$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2$ より $\quad \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1+3-3}{2} = \frac{1}{2}.$

問2

Oから平面ABCに垂線を下ろし.

$\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ $(x+y+z=1)$

とおく.

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ より

$\overrightarrow{OH}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{OH}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{OH}\cdot\vec{c}$

$x + \frac{y}{2} + z \times 0 = \frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = x \times 0 + \frac{y}{2} + 3z.$

$$\begin{cases} 2x + y = x + 2y + z \\ 2x + y = y + 6z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{6},\ y = \frac{1}{3}$

$\therefore \underline{\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}}$

問3

三角形ABCの内心Iは

$\overrightarrow{OI} = \frac{BC\,\overrightarrow{OA} + CA\,\overrightarrow{OB} + AB\,\overrightarrow{OC}}{BC + CA + AB}$

$= \frac{\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{\sqrt{3} + 2 + 1}$

$= \frac{\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3 + \sqrt{3}}$

$= \underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\vec{a} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\vec{b} + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\vec{c}}$

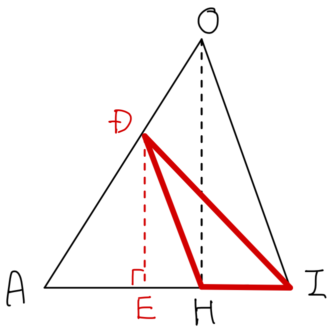
問4 $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)$$

よって 点Hは∠BACの二等分線上つまり直線AI上にある.

$$\overrightarrow{AI}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)$$

よって平面OAIを切り出すと次のようになる



$|\overrightarrow{IH}|=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ より

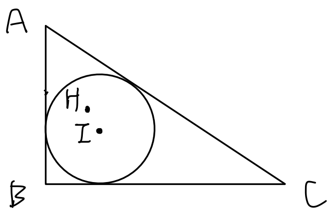
$$S=\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\times DE=\frac{\sqrt{2}}{24}.$$

$DE=OH\times(1-x)=\frac{\sqrt{6}}{3}(1-x)$ より

$$\frac{2-\sqrt{3}}{6}(1-x)=\frac{1}{24}$$
$$1-x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore\ x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

問4（別解）



$\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BI}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{BC}$

Bを原点にとり, $C(\sqrt{3},0,0)$ $A(0,1,0)$とおく

$$I\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2},\ 0\right)$$
$$H\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

であり $|\overrightarrow{OH}|^2=\overrightarrow{OH}\cdot\vec{a}=\frac{2}{3}$ から $O\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

よって

$\overrightarrow{BD}=(1-x)\overrightarrow{BO}+x\overrightarrow{BA}$ より

$$D\left(\frac{\sqrt{3}}{6}(1-x),\ \frac{1}{2}(1+x),\ \frac{\sqrt{6}}{3}(1-x)\right)$$
$$I\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2},\ 0\right)$$
$$H\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{HI}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1,\ 0\right)=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{3}-3,\ 3\sqrt{3}-6,\ 0\right)$$
$$\overrightarrow{HD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x,\ \frac{x}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}(1-x)\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left(-\sqrt{3}x,\ 3x,\ 2\sqrt{6}(1-x)\right)$$
$$|\overrightarrow{HI}|^2=\frac{1}{3}(7-4\sqrt{3})$$
$$|\overrightarrow{HD}|^2=\frac{1}{3}(3x^2-4x+2)$$
$$\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HD}=\frac{1}{3}(\sqrt{3}-2)x$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}(7-4\sqrt{3})(3x^2-4x+2)-\frac{1}{9}(\sqrt{3}-2)^2x^2}$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{(7-4\sqrt{3})(2x^2-4x+2)}=\frac{\sqrt{2}}{24}$$
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2-\sqrt{3})^2(x-1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$(2-\sqrt{3})(1-x)=\frac{1}{4}$$
$$1-x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$
$$x=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

（これは $0<x<1$ をみたす）

[Ⅲ]

(1) $P(2s^2,\ s,\ 0)$, $Q(2t^2,\ 0,\ t)$

とおくと、

$$\overrightarrow{OR} = (2(s^2+t^2),\ s,\ t)$$

である。$x=k$ 上では $s^2+t^2 = \frac{k}{2}$

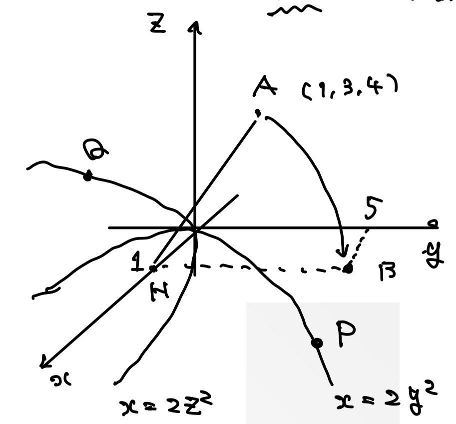
であるから、

$$s = \sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta,\quad t = \sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta$$

とおけば、

$$\overrightarrow{OR} = \left(k,\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta,\ \sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta\right)$$

となるから、$x=k$ 上では $(k, 0, 0)$ を中心、半径 $\sqrt{\frac{k}{2}}$ の円である。



(2) Hの座標は $(1, 0, 0)$ となるから

$AH = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ である。

(3) $BH = 5$ より Bの座標は

$(1, 5, 0)$ である

(4) S は (1) より x軸を中心として対称であるから、AX の最小値と BX の最小値は等しく

$$|\overrightarrow{BX}|^2 = (k-1)^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta - 5\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta\right)^2$$

$$= k^2 - \frac{k}{2} + 26 - 5\sqrt{2}\sqrt{k}\cos\theta$$

k を固定すると、$\theta = 0$ のとき最小で、そのとき

$$|\overrightarrow{BX}|^2 = k^2 - 5\sqrt{2}\sqrt{k} - \frac{3}{2}k + 26$$

これを $f(k)$ とおくと、

$$f'(k) = 2k - \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{k}} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{k}-\sqrt{2})(4k+4\sqrt{2}\sqrt{k}+5)}{2\sqrt{k}}$$

k	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(k)$		$-$	0	$+$
$f(k)$		↘		↗

これより、最小値 $\sqrt{f(2)} = \sqrt{17}$

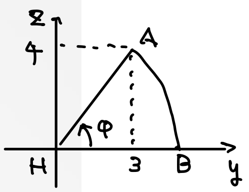
をとる。ここで、$k_1 = 2$ とし、

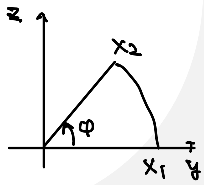
$X_1\left(k_1, \sqrt{\frac{k_1}{2}}, 0\right)$ とすると、AX が最大となるときの X は図の回転角 φ を用いて $\left(k_1, \sqrt{\frac{k_1}{2}}\cos\varphi, \sqrt{\frac{k_1}{2}}\sin\varphi\right)$

とかける。ここで、

$$\cos\varphi = \frac{3}{5},\quad \sin\varphi = \frac{4}{5}$$

であるから、$|\overrightarrow{AX}|$ が最小となる X の座標は $\left(2, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ である。





[IV]

(1) $b(-x) = \frac{1}{2}\{a(-x) + a(x)\} = b(x)$

$c(-x) = \frac{1}{2}\{a(-x) - a(x)\} = -c(x)$

であるから、$b(x)$ は偶関数、$c(x)$ は奇関数である。

(2) (i) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= -\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt \quad \cdots ①$

$g(x)f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とおくと、

$① = -\dfrac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_x^{x+h}$

$= -\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$\longrightarrow -F'(x) = \underline{-g(x)f(x)} \quad (h \to 0)$

(ii) $\displaystyle\int g(x)\,dx = \int\left(\frac{(1+e^x)'}{1+e^x} - \frac{(\cos x)'}{3+\cos x}\right)dx$

$= \log\dfrac{1+e^x}{3+\cos x} + C$

(C は積分定数) であるから、$x = 0$ で

$\log\dfrac{2}{4} + C = 0 \qquad \therefore C = \log 2$

これより

$G(x) = \underline{\log\dfrac{2(1+e^x)}{3+\cos x}}$

(iii) $h'(x) = G'(x)e^{G(x)}f(x) + e^{G(x)}f'(x)$

$= g(x)e^{G(x)}f(x) - e^{G(x)}f(x)g(x)$

$= 0$

であるから、$h(x)$ は定数関数で、

$h(0) = e^{G(0)}f(0) = 2$

も合わせると、常に $h(x) = 2$ となり

$e^{G(x)}f(x) = 2$

$f(x) = \dfrac{2}{e^{G(x)}} = \underline{\dfrac{3+\cos x}{1+e^x}}$

(3) (1) より

$I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{2}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\pi}(f(x)+f(-x))\,dx$

となる。ここで、

$f(x) + f(-x) = \dfrac{3+\cos x}{1+e^x} + \dfrac{3+\cos(-x)}{1+e^{-x}}$

$= (3+\cos x)\left(\dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$

$= 3 + \cos x$

であるから、

$I = \displaystyle\int_0^{\pi}(3+\cos x)\,dx$

$= \Big[3x + \sin x\Big]_0^{\pi} = \underline{3\pi}$