２０２５年３月６日　実施

聖マリアンナ医科大学

後期　数学

（制限時間　９０分）

解答・解説

[1]

(1) $a_{k+1}=a_k$ となるのは

$a_1=3600$ となるときなので

$x=0.01875a_k$

$=\underline{67.5}$

(2) $1.01875=r$ とおくと

$a_{k+1}=ra_k-x$ より

$a_{k+1}-\dfrac{x}{r-1}=r\left(a_k-\dfrac{x}{r-1}\right)$

$a_0=3600$ としておく.

$a_n-\dfrac{x}{r-1}=\left(a_0-\dfrac{x}{r-1}\right)r^n$

$a_n=\dfrac{x}{r-1}+\left(a_0-\dfrac{x}{r-1}\right)r^n$

$a_{20}=0$ のとき,

$\dfrac{x}{r-1}+\left(a_0-\dfrac{x}{r-1}\right)r^{20}=0$

$(r^{20}-1)\dfrac{x}{r-1}=a_0r^{20}$

$x=\dfrac{r^{20}(r-1)}{r^{20}-1}a_0 \cdots (*)$

$(*)$ に $r=1.01875$, $r^{20}=1.45$

$a_0=3600$ を代入して

$x=\dfrac{1.45\times0.01875}{0.45}\times3600$

$=\underline{217.5}$

[2]

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=4\sqrt{3}\{\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta\}$

$=4\sqrt{3}(-2\cos^2\theta+\cos\theta+1)$

$=-4\sqrt{3}(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)$

よって x の増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
x	0	↗	9	↘	-9	↗	0

より $\underline{-9\leqq x\leqq 9}$

(2) $y=-4\sqrt{3}(\cos^2\theta-\cos\theta-2)$

$=-4\sqrt{3}\left\{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}$

よって $\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $9\sqrt{3}$

$\cos\theta=-1$ のとき最小値 0

より $\underline{0\leqq y\leqq 9\sqrt{3}}$

また $\dfrac{dy}{d\theta}=4\sqrt{3}(-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta)$

$=4\sqrt{3}(\sin2\theta-\sin\theta)$

$=\underline{4\sqrt{3}\sin2\theta-4\sqrt{3}\sin\theta}$

(3) Cの長さをlとおくと

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

ここで

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(-4\sqrt{3}\cos 2\theta+4\sqrt{3}\cos\theta\right)^2+\left(4\sqrt{3}\sin 2\theta-4\sqrt{3}\sin\theta\right)^2$$

$$=96-96(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)$$

$$=96-96\cos\theta$$

$$=96-96\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=192\sin^2\frac{\theta}{2}$$ より

$$l=8\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$=8\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=8\sqrt{3}\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$=8\sqrt{3}\{2-(-2)\}=32\sqrt{3}$$

[3]

(1) 原点と$P(s,t)$の距離をd_1とおくと、$d_1=\sqrt{s^2+t^2}$

また、$P(s,t)$と直線$2ax+3by-1=0$の距離をd_2とおくと

$$d_2=\frac{|2as+3bt-1|}{\sqrt{4a^2+9b^2}}$$

$d_1=d_2$より $d_1^2=d_2^2$

$$s^2+t^2=\frac{(2as+3bt-1)^2}{4a^2+9b^2}$$

$$(s^2+t^2)(4a^2+9b^2)=4a^2s^2+9b^2t^2+1+12abst-6bt-4as$$

$$4a^2t^2+9b^2s^2-12abst+6bt+4as-1=0$$

$$9b^2s^2-12abst+4a^2t^2+4as+6bt-1=0$$

(これを⊛とする)

(2)

(i) $b=0$のとき ⊛に代入して

$$4a^2t^2+4as-1=0$$

$s=\dfrac{1-4a^2t^2}{4a}$ より (右辺) が最大となるとき $t=0$ より $s=\dfrac{1}{4a}$ より $Q\left(\dfrac{1}{4a},0\right)$

(ii) $b\neq 0$のとき ⊛より

$$4a^2t^2+2(3b-6abs)t+9b^2s^2+4as-1=0$$

をtの2次方程式とみる

判別式をDとおくと tは実数より $D\geqq 0$

$$\frac{D}{4}=(3b-6abs)^2-4a^2(9b^2s^2+4as-1)$$

$$=9(b^2-4ab^2s+4a^2b^2s^2)-36a^2b^2s^2-16a^3s+4a^2$$

$$=9b^2-36ab^2s-16a^3s+4a^2$$

$D\geqq 0$より

$$36ab^2s+16a^3s\leqq 9b^2+4a^2$$

$a>0$から

$$s\leqq\frac{9b^2+4a^2}{4a(9b^2+4a^2)}=\frac{1}{4a}$$

よって S の最大値は $\frac{1}{4a}$

このとき

$$t = -\frac{2(3b-6abs)}{8a^2} = \frac{-3b+6abs}{4a^2}$$

$s=\frac{1}{4a}$ を代入して

$$t = \frac{-3b+\frac{3}{2}b}{4a^2} = -\frac{3b}{8a^2}$$

よって $Q\left(\frac{1}{4a}, -\frac{3b}{8a^2}\right)$

(3) (2)より $b=0$ のときも

$Q\left(\frac{1}{4a}, -\frac{3b}{8a^2}\right)$ をみたす。

よって $Q(X, Y)$ とおくと

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4a} & \cdots ① \\ Y = -\frac{3b}{8a^2} & \cdots ② \end{cases}$$

①より $X \neq 0$ から

$a = \frac{1}{4X}$ なので

$b = -\frac{8}{3}a^2 Y = -\frac{Y}{6X^2}$ と表せる

$4a^2+9b^2=1$ に代入して

$$4\left(\frac{1}{4X}\right)^2 + 9\left(-\frac{Y}{6X^2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4X^2} + \frac{Y^2}{4X^4} = 1$$

$$Y^2 = X^2(4X^2-1)$$

これは点 $Q(X, Y)$ が曲線 $y^2=f(x)=x^2(4x^2-1)$ 上の点であることを表し、$y^2 \geqq 0$ より

$x^2(4x^2-1) \geqq 0$

$a>0$ より $x>0$ と合わせて $x \geqq \frac{1}{2}$

[4]

(1)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k \cdot h^{n-k} - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k x^k \cdot h^{n-k}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k x^k \cdot h^{n-k-1}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k \cdot x^k \cdot h^{n-k-1}$$
$$= {}_nC_{n-1}x^{n-1} = n\cdot x^{n-1}$$

よって示せた■

(2)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{x+h} - \frac{\sin x}{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x\sin(x+h) - (x+h)\sin x}{x(x+h)}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x(\sin x\cos h + \cos x\sin h) - (x+h)\sin x}{x(x+h)}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x\sin x(\cos h - 1) + x\cos x\sin h - h\sin x}{x(x+h)}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin x}{x+h}(\cos h - 1) + \frac{\cos x}{x+h}\sin h - \frac{h\sin x}{x(x+h)}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x}{x+h}\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\cos x}{x+h}\times\frac{\sin h}{h} - \frac{\sin x}{x(x+h)}\Bigg\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x+h}\cdot\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h} + \frac{\cos x}{x+h}\times\frac{\sin h}{h} - \frac{\sin x}{x(x+h)}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x+h}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\frac{h}{2} + \frac{\cos x}{x+h}\times\frac{\sin h}{h} - \frac{\sin x}{x(x+h)}\right\}$$

$y=x$ は連続なので

$\lim_{h\to 0}(x+h)=x$ だから

$$f'(x)=\frac{\sin x}{x}\times 1\times 0+\frac{\cos x}{x}\times 1-\frac{\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$